اندازه‌های ریسک و آماره‌های آن

مترجم:
- خشایار تشت زر
-کارشناس ارشد علوم اکچوئرال، کارشناس گروه پژوهشی بیمه‌های اشخاص پژوهشکده بیمه

ادبیات مربوط به ریسک حوزه وسیعی از علوم را شامل می‌شود. در این نوشتار، تمرکز بر ریسک‌های مالی و اندازه ریسک‌های مالی است. فرض می‌شود که نتایج مالی یک فعالیت اقتصادی می‌تواند بر مبنای متغیر تصادفی X کمّی‌سازی شود. به‌عنوان‌مثال، این متغیر تصادفی می‌تواند تغییر مطلق یا نسبی در بازده بازار، بازده و سود یک شرکت (بانک، بیمه و ...)، مطالبات انباشته‌شده مجموعه‌ای از بیمه‌شدگان در یک بازه زمانی یا خسارت‌های انباشته‌شده برای پورتفویی از ریسک‌های اعتباری باشد. متغیر تصادفی X می‌تواند در موقعیت‌های مالی مختلف میزان مثبت (عایدی‌ها[1]) یا منفی (خسارات[2]) را اختیار کند.

تعداد زیادی از اندازه‌های ریسک وجود دارد که معمولاً واریانس و ارزش در معرض خطر[3] برای شرکت‌های بیمه و خوانندگان آشناتر است. به‌طورکلی اندازه‌های ریسک می‌توانند در دو مقوله متمایز طبقه‌بندی شوند:

- ریسک به‌عنوان مقدار انحراف از یک هدف؛
- ریسک به‌عنوان الزامات سرمایه‌ای[4] (یا الزامات حق‌بیمه).

- ریسک به‌عنوان مقدار انحراف از یک هدف

این هدف معمولاً میانگین یا مقدار مورد انتظار است. البته بر حسب شرایط و انتخاب تحلیل گر، این هدف می‌تواند آماره‌های دیگر باشد.

● اندازه‌های ریسک دو طرفه[5]

در ادامه، مقدار مورد انتظار به‌عنوان هدف مربوطه درنظرگرفته می‌شود. اندازه‌های ریسک دو طرفه، مقدار فاصله (در هر دو جهت)

1. Gains
2. Losses
3. Value –at – Risk (VaR)
4. Capital Requirement
5. Two – Sided Risk Measures

واقعی X از E(X) را اندازه می‌گیرد. توابع مختلف فاصله، منجر به اندازه‌های ریسک متفاوت می‌شود. به‌عنوان‌مثال، در انحرافات مرتبه دوم (نوسانات[1])، این تابع منجر به اندازه ریسک واریانس یا با گرفتن جذر آن، اندازه ریسک انحراف معیار می‌شود.

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X - E(X)\right]^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

از زمان کار پیشگامانه مارکوویتز[2]، به ترتیب واریانس و انحراف معیار، اندازه‌های ریسک سنتی در اقتصاد و علوم‌مالی به‌حساب‌می‌آیند. این اندازه‌های ریسک، خصوصیات خوبی برای استفاده در کارهای تکنیکال دارند. به‌عنوان‌مثال، واریانس بازده یک سبد دارایی[3] برابر با مجموع واریانس‌ها و کوواریانس‌های بازدهی تک‌تک دارایی‌هاست. علاوه بر این، واریانس به‌عنوان تابع استاندارد بهینه‌سازی (بهینه‌سازی مرتبه دوم) به‌کارمی‌رود. در نهایت اینکه، جعبه ابزار آماری مناسبی برای برآورد واریانس و ماتریس واریانس-کوواریانس وجود دارد.

اما ازسوی‌دیگر، یک اندازه «دوطرفه» با درک شهودی ریسک به‌عنوان انحراف از مقادیر منفی‌ای که خطرناک هستند، در تضاد و تناقض است و در واقع در اکثر مواقع تنها بخش منفی و پایینی است که اهمیت دارد. علاوه بر این، واریانس برای توزیع‌های دم‌سنگین و ریسک‌های متناظر با دنباله‌های آنها توضیح رضایت‌بخشی ندارد. این مسئله منجر به پیشنهاد گشتاورهای مرکزی (نرمال شده) مراتب بالاتر نظیر چولگی و کشیدگی برای تجزیه‌وتحلیل و ارزیابی ریسک به صورت دقیق‌تر شده است.

با درنظرگرفتن قدر مطلق انحرافات به‌عنوان اندازه‌ای از فاصله، اندازه میانگین قدر مطلق انحرافات[4] به‌دست می‌آید که فرمول کلی آن عبارت است از:

$$R(X) = E[|X - E(X)|^k]$$

$$R(X) = E[|X - E(X)|^k]^{1/k}$$

که اندازه ریسک دوم توسط کیجیما[5] و انیشی[6] مورد توجه قرار گرفته است.

به‌صورت کلی‌تر، روز[7] تابعی به این صورت تعریف کرده است:

$$\begin{cases} f(x) = ax & \text{برای } x \geq 0 \\ f(x) = b|x| & \text{برای } x < 0 \end{cases}$$

که $a, b \geq 0$ و اندازه ریسک $R\left(X - E(X)\right)$ (فقط) با $a=0$ و $b>1$ و برای $k=1$ برقرار است. چنانچه $(k \geq 1)$ باشد، داریم:

$$R(X) = E[f(X - E(X))^k]^{1/k}$$

1. Volatility
2. Markowitz
3. Portfolio

4. Mean Absolute Deviations (MAD)
5. Kimija
6. Ohnishi
7. Ruz

اندازه ریسک از این نوع اجازه می‌دهد وزن‌دهی متفاوتی برای مقادیر انحراف مثبت و منفی از مقدار مورد انتظار صورت پذیرد که این مطلب قبلاً مورد توجه کیجیما و انیشی قرار گرفته بود.

• اندازه‌های ریسک نقصانی [یا یک طرفه][1]

اندازه‌های ریسک‌های نقصانی [یک طرفه] نسبت به متغیر هدف، مقادیر پایین را اندازه‌گیری می‌کنند. این هدف می‌تواند مقدار مورد انتظار باشد و در حالت کلی، این هدف می‌تواند یک مقدار دلخواه مشخص z (عایدی هدف، بازده هدف، کمینه بازده قابل پذیرش) یا حتی یک معیار تصادفی باشد.

یک کلاس عمومی از اندازه‌های ریسک، کلاس گشتاورهای جزئی مرتبه پایین[2] است:

$$LPM_k(z;X)= E[\max(z-X,0)^k] \qquad (k=0,1,2,000)$$

یا در شکل نرمال شده $(k \geq 2)$:

$$R(X) = LPM_k(z;X)^{1/k}$$

اندازه‌های ریسک از نوع اول (LPM_k) را فیشبورن[3] بررسی کرده است.

گشتاورهای پایه‌ای، نقشی مهم در کاربردها دارند و برای $k=0,1,2$ به‌دست‌می‌آیند. احتمال نقصانی [یک طرفه[4]] در ادامه آمده است:

$$SP_z(X) = P(X \leq z) = F(z)$$

که دراین‌صورت، نقصان مورد انتظار[5] از این رابطه محاسبه می‌گردد:

$$SE_z(X) = E[\max(z-X,0)]$$

واریانس نقصانی[6] نیز از این رابطه محاسبه می‌شود:

$$SV_z(X) = E[\max(z-X,0)^2]$$

بنابراین، انحراف معیار نقصانی[7] برابر است با:

$$SSD_z(X) = E[\max(z-X,0)^2]^{1/2}$$

تغییرات برای $z=E(X)$ محاسبه می‌شود. به‌عنوان‌مثال، نیمه قدر مطلق انحرافات پایینی[8]، که توسط اُگریزاک[9]، روزینسکی[10]، گوتو[11] و کونو[12] مورد توجه قرار گرفته، در ادامه آمده است:

$$R(X) = E[\max(E(X)-X,0)]$$

1. Measures of Shortfall Risk
گاهی به آن ریسک «سرریز» نیز گفته می‌شود.
2. Lower Partial Moments
3. Fishburn
4. Shortfall Probability

5. Expected Shortfall
6. Shortfall Variance
7. Shortfall Standard Deviation
8. Lower – Semi Absolute Deviation (LSAD)
9. Ogryczak
10. Ruszczynski
11. Gotoh
12. Konno

نیمه واریانس(شبه واریانس)[1]:

$$R(X) = E[max(E(X) - X, 0)^2]$$

و همچنین نیمه انحراف معیار (استاندارد)[2]:

$$R(X) = E[max(E(X) - X, 0)^2]^{1/2}$$

تغییر مورد توجه دیگر، اندازه ریسک نقصانی شرطی است. یک مثال مهم برای این مورد، میانگین مازاد خسارت [3] (مقدار مورد انتظار نقصانی) است:

$$MEL_z(X) = E(z - X|X \le z) = \frac{SE_z(X)}{SP_z(X)}$$

که میانگین نقصانی تحت شرط رخداد نقصان است. میانگین مازاد خسارت[2] می‌تواند به‌عنوان نوعی از اندازه ریسکِ بدترین مورد[4] درنظر گرفته‌شود.

در یک موضوع بیمه‌ای، MEL به شکل $MLE_z(X) = E(S-z|S \ge z)$ برای یک متغیر مطالبات انباشته $S=-X \ge 0$، درنظرگرفته‌می‌شود تا اندازه مناسبی از ریسک راست-دنباله‌ای حاصل گردد.

اندازه دیگر برای ریسک راست-دنباله‌ای می‌تواند براساس اندازه ریسک‌های اعوجاجی[5] نیز به‌دست‌آید. به این ترتیب که اگر تابع اعوجاج $g(x)=\sqrt{x}$ را به‌کار بریم و در نتیجه $E(S)$ را از آن کم کنیم، یک اندازه ریسک از نوع نخست به‌دست‌می‌آید:

$$R(S) = \int_0^\infty \sqrt{1-F(S)}\; ds - E(S)$$

این همان انحراف راست- دنباله‌ای است که وانگ[6] مورد توجه قرار داده است.

با وجود اینکه اندازه‌های ریسک نقصانی از نظر شهودی مناسب به‌نظر می‌رسند، ولی معایبی در خصوص تجمیع ریسک سبد دارایی، بهینه‌سازی و برخی تعاریف آماری دارند که این موضوع به مشکلات بزرگ‌تر تکنیکال می‌انجامد.

• کلاس‌های اندازه‌های ریسک

استون[7] یک کلاس سه پارامتری از اندازه‌های ریسک به این شکل تعریف کرده است:

$$R(X) = [\int_{-\infty}^{z} (|x-c|)^k f(x)dx]^{1/k}$$

که دارای پارامترهای z، k و c است. به‌عنوان‌مثال، کلاس استون همانند اندازه‌های ریسک کیجیما و انیشی، شامل انحراف معیار، نیمه انحراف معیار (استاندارد) و میانگین قدر مطلق انحرافات می‌شود.

به‌طورکلی‌تر، پدرسن[8] و ساتچل[9] کلاس پنج پارامتری زیر از اندازه‌های ریسک را در نظر گرفتند:

$$R(X) = [\int_{-\infty}^{z} (|x-c|)^a w[F(y)]f(y)dy]^b$$

که شامل کلاس استون و همچنین واریانس، نیمه واریانس، گشتاورهای جزئی مرتبه پایین و اندازه‌های ریسک اضافی[10] می‌شود.

- ریسک به‌عنوان سرمایه ضروری (یا حق‌بیمه ضروری)

• ارزش در معرض خطر

شاید معروف‌ترین اندازه ریسک از نوع دوم ارزش در معرض خطر باشد. اگر V_t را به‌عنوان ارزش بازاری یک موقعیت (وضعیت) مالی در زمان $[t,t+h]$ بدانیم، $L = V_{(t)} - V_{(t+h)}$ خسارت دوره‌ای بالقوه[11] یک موقعیت (وضعیت) مالی در طی بازه زمانی $[t, t+h]$ است. بنابراین، ارزش در معرض خطر را چنین تعریف می‌کنیم:

$VaR_\alpha = VaR(\alpha;h)$

$P(L > VaR_\alpha) = \alpha$ که در سطح اطمینان $0 < \alpha < 1$ و با قید مشخص شده است.

1. SemiVariance
2. Semistandard Deviation
3. Mean Excess Loss (MEL)
4. The Worst-Case Risk
5. Distorted Risk Measures
6. Wang

7. Stone
8. Pedersen
9. Satchell
10. Additional Risk Measures
11. Potential Periodic Loss

• ارزش در معرض خطر شرطی[1]

اندازه ریسک ارزش در معرض خطر شرطی در سطح اطمینان α به این صورت تعریف می‌شود (به منظور مقایسه بهتر با اندازه ریسک، به شکل عبارتی از L نشان داده می‌شود):

$$CVaR_{\alpha}(L) = E[L|L > VaR_{\alpha}]$$

بر مبنای تفسیر VaR به‌عنوان حداکثر خسارت $100(1-\alpha)$ درصدی، CVaR می‌تواند به‌عنوان متوسط خسارت حداکثری و در بدترین موارد 100α درصدی تفسیر شود. بر مبنای تعریف، در صورت وجود تابع چگالی، CVaR به‌عنوان یک اندازه از ریسک منسجم[2] است که البته درحالت‌کلی چنین چیزی صحیح نیست.

درحالت‌کلی، باید اندازه‌های ریسک جایگزین نظیر نقصانی (سرریز) مورد انتظار یا معادل آنها را زمانی که نسبت به انسجام اطمینان وجود دارد، درنظرگرفت (در ادبیات موضوع، تعدادی از اندازه‌های ریسک نزدیک به موضوع و مرتبط با آن همچون نقصانی (سرریز) مورد انتظار، مقدار انتظار شرطی دنباله‌ای (دمی)، میانگین دنباله‌ای و ندامت مورد انتظار[3] توسعه یافته‌اند که مشخصات مختلفی را برآورده می‌سازند).

می‌توان CVaR را به‌این صورت نیز تجزیه کرد:

$$CVaR_{\alpha}(L) = VaR_{\alpha}(L) + E[L - VaR_{\alpha}|L > VaR_{\alpha}]$$

که CVaR مجموع VaR و مازاد میانگین بر VaR در زمانی است که چنین مازادی وجود دارد. این مطلب نشان می‌دهد که CVaR همیشه منجر به سطح ریسکی می‌شود که حداقل به بزرگی اندازه‌ای است که توسط VaR اندازه گرفته می‌شود.

باید توجه داشت که انتقادهایی بر CVaR وارد است. برای نمونه می‌توان به هوقلیمان[4] اشاره کرد که بر مبنای محاسبات عددی کامپیوتری به این نتیجه رسید که CVaR با افزایش سنگینی دم دنباله سازگار نیست.

1. Conditional Value-at-Risk

2. Coherent

در برخی موارد «هم گروهی» نیز ترجمه می‌شود.

3. Expected Regret

4. Hürlimann

• گشتاورهای جزئی مرتبه پایین[5]

فیشر ثابت کرد که اندازه‌های ریسک که در ادامه ذکر می‌شود برای این مقادیر منسجم هستند:

$0 \leq a \leq 1, k \geq 1$

$$R(X) = -E(X) + aLPM_k(E(X); X)^{1/k}$$

این مثالی از تناظر یک‌به‌یک میان اندازه‌های ریسک نوع نخست و دوم است (روز).

• اندازه‌های ریسک اعوجاجی[6]

براساس سیستم اصول موضوعه وانگ/یانگ/پانجر[7]، توزیع‌های عمومی خسارت/عایدی مورد توجه قرار می‌گیرد. تابع $g:[0,1] \rightarrow [0,1]$ یک تابع اعوجاج افزایشی با $g(0)=0$ و $g(1)=1$ است که با تبدیل یک تابع $F^{*}(x) = gf(x)$ توزیع اعوجاج تعریف می‌شود. اکنون اندازه ریسک زیر را برای متغیر تصادفی X با تابع توزیع F مورد ملاحظه قرار می‌دهیم:

$$E^{*}(X) = \int_{-\infty}^{0} g(F(X))dx + \int_{0}^{\infty} [1 - g(F(X))]dx$$

این اندازه ریسک، مقدار مورد انتظار X تحت توزیع تبدیل یافته F^{*} است. CVaR متناظر با تابع اعوجاج $g(u)=0$ برای $u < \alpha$ و $g(u) = {(u-\alpha)}/{(1-\alpha)}$ برای $u \geq \alpha$ و برای $u \geq \alpha$ است که پیوسته ولی در نقطه $u = \alpha$ مشتق‌ناپذیر است.

به‌طورکلی، CVaR و VaR فقط، اطلاعات از تابع توزیع برای $u \geq \alpha$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهند و اطلاعات موجود در تابع توزیع برای $u < \alpha$ اصلاً دیده نمی‌شود. این انتقادی است که وانگ انجام داده و استفاده از توابع اعوجاج جایگزین را پیشنهاد کرده است. برای مثال می‌توان به خانواده بتا از توابع اعوجاج یا تبدیل وانگ اشاره کرد.

منابع:

منابع جهت استفاده علاقه‌مندان در دفتر تازه‌های جهان بیمه موجود است.

5. Lower Partial Moments

6. Distorted Risk Measures

7. Wang/Young/Panjer(WYP)