

Stock Portfolio Optimization with a Hybrid Approach of Credit-Rigid Constraint Programming and Data Envelopment Analysis Models

Ahmad Rezaei *

Assistant Professor, Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Mehdi Khorramabadi

Assistant Professor, Department of Accounting, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Abstract

This research aims to provide a new and comprehensive approach to optimizing investment portfolios in volatile and highly uncertain markets. Given the importance of risk management and achieving optimal returns in investment, the proposed model utilizes a powerful combination of credit-robust constraint programming and data envelopment analysis models. This model simultaneously seeks to optimize asset mix, reduce risk, and increase returns. In this research, using Tehran Stock Exchange data, the performance of the proposed model has been evaluated in comparison with traditional methods. The results show that the proposed model is able to create portfolios with higher returns and lower risks than traditional methods. Also, this model has shown high flexibility against sudden market changes and is more resistant to economic shocks.

Keywords: Portfolio optimization, uncertainty, credit-robust constraint programming, data envelopment analysis models, and stock selection

How to Cite: Rezaei, A. and Khorramabadi, M. (2025). Stock Portfolio Optimization with a Hybrid Approach of Credit-Rigid Constraint Programming and Data Envelopment Analysis Models. Journal of Intelligent Strategic Management .4(2), 11-46.

doi: bumara .3.2.15564.35887873.63089319



Intelligent Strategic Management (JISM) in Development and Evolution is licensed under a Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License.

© Authors

* Corresponding Author : a.rezaee70@pnu.ac.ir

بهینه‌سازی پرتفوی سهام با رویکرد ترکیبی برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها

احمد رضایی*

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

مهدی خرم آبادی

استادیار گروه حسابداری، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

این پژوهش با هدف ارائه یک رویکرد نوین و جامع برای بهینه‌سازی پرتفوی سرمایه‌گذاری در بازارهای پرنوسان و با عدم قطعیت بالا انجام شده است. با توجه به اهمیت مدیریت ریسک و کسب بازده مطلوب در سرمایه‌گذاری، مدل پیشنهادی از ترکیب قدرتمند برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بهره می‌برد. این مدل به طور هم زمان به دنبال بهینه‌سازی ترکیب دارایی‌ها، کاهش ریسک و افزایش بازدهی است. در این تحقیق، با استفاده از داده‌های بورس تهران، عملکرد مدل پیشنهادی در مقایسه با روش‌های سنتی ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی قادر است پرتفوی‌هایی با بازدهی بالاتر و ریسک کمتر نسبت به روش‌های سنتی ایجاد کند. همچنین، این مدل انعطاف‌پذیری بالایی در برابر تغییرات ناگهانی بازار از خود نشان داده و در برابر شوک‌های اقتصادی مقاوم‌تر است.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی پرتفوی، عدم قطعیت، برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و انتخاب سهام

استناد به این مقاله: رضایی، احمد و خرم آبادی، مهدی. (۱۴۰۴). بهینه‌سازی پرتفوی سهام با رویکرد ترکیبی برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها. مدیریت استراتژیک هوشمند، ۴(۲)، ۴۶-۱۱.



مدیریت استراتژیک هوشمند (JISM) در توسعه و تکامل تحت مجوز بین‌المللی کپی‌رایت کامنز با شرایط انتساب-غیرتجاری ۴٫۰ منتشر می‌شود.

©نویسندگان

مقدمه

در شرایط کنونی بازارهای مالی، تشکیل سبد سهام بهینه و مدیریت آن از اصلی ترین حوزه های تصمیم گیری مالی به شما می رود. از این رو، انتخاب پرتفوی بهینه و مناسبی از سهام که بتواند همزمان بازده ماکزیمم و ریسک مینیمم ناشی از سرمایه گذاری را به ارمغان آورد، حائز اهمیت شایانی است. با پیچیدگی بازارهای مالی و تنوع مولفه های موثر بر سرمایه گذاری، علاوه بر شناسایی ریسک و بازده ناشی از سرمایه گذاری، شناسایی سایر عوامل موثر دیگر مبتنی بر استفاده از رویکردهای تصمیم گیری چند معیاره، اجتناب ناپذیر می باشد. از این رو، پژوهش حاضر با هدف بهینه سازی پرتفوی سرمایه گذاری مالی در شرایط عدم اطمینان و ریسک، به بررسی یک رویکرد نوین مبتنی بر برنامه ریزی محدودیت اعتبار - استوار پرداخته است. بهینه سازی پرتفوی به معنای تعیین سهم سرمایه گذاری در دارایی ها به گونه ای است که ترکیب نهایی بهترین عملکرد ممکن را، بر اساس معیارهای مشخص، ارائه دهد. این معیارها شامل بازده مورد انتظار، پراکندگی بازده ها، و سایر پارامترهای مرتبط با ریسک مالی هستند (محمدي و همکاران، ۱۳۹۷). در رویکردهای مدرن بهینه سازی، علاوه بر معیارهای سنتی نظیر انحراف معیار و واریانس، از سنجش های پیشرفته ای مانند نرخ سورتینو و ارزش در معرض ریسک نیز استفاده می شود. پرتفوی مالی به عنوان مجموعه ای از دارایی ها، پروژه ها یا برنامه ها تعریف می شود که به منظور دستیابی به اهداف استراتژیک مدیریت می شوند. این اجزاء هرچند ممکن است ارتباط مستقیمی با یکدیگر نداشته باشند، لکن باید به گونه ای ترکیب شوند که بهینه ترین ترکیب را برای سرمایه گذار فراهم کنند (ادرسینگ و ژانگ، ۲۰۰۷). در این میان، مسئله ریسک و عدم قطعیت نقش کلیدی دارد. بازارهای مالی همواره با تغییرات پیش بینی ناپذیر و نوسانات همراه هستند و این شرایط، سرمایه گذاران را با چالش های متعددی روبه رو می کند. از این رو، یافتن روش هایی برای مدیریت به منظور کنترل این عدم قطعیت ها و طراحی مدل هایی که بتوانند به سرمایه گذاران در کاهش ریسک و افزایش بازده کمک کنند، ضروری است.

تاکنون مدل ها و روش های متعددی در زمینه بهینه سازی سبد سهام توسط محققان متعدد ارائه شده است. از جمله مهم ترین این مدل ها می توان به مدل ارائه شده توسط مارکوویتز و شارپ اشاره نمود. مارکوویتز مدل اساسی سبد سهامی را ارائه نمود که مبنایی برای نظریه مدرن پرتفوی قرار گرفت. در این مدل، علاوه بر در نظر گرفتن بازده سرمایه گذاری، عامل ریسک نیز در انتخاب دارایی های مالی اعمال گردید و به این ترتیب کمی

سازی این نظریه، نشان داد که چگونه پرتفوی سهام می تواند باعث کاهش ریسک سرمایه گذاری گردد (جابری و همکاران، ۱۴۰۱). پس از مارکویتز، شارپ با ارائه مدلی ساده تر، نشان داد که بازده هر سهم چگونه از بازده بازار تاثیر می پذیرد. مدل مارکویتز از نظر تئوری، ویژگی های منحصر به فردی دارد، لکن ضعف های آن مانع استفاده از این مدل در عمل می شود. در این مدل عموماً نرخ بازده بر اساس داده های گذشته برآورد می گردد لکن در تعمیم های بعدی مبتنی بر مدل مارکویتز مانند رویکرد استوار که به دنبال بهینه سازی چند هدفه هستند، نرخ بازده مبتنی بر سناریوهای آتی نیز برآورد می گردد. امروزه بهینه سازی چند هدفه، از جمله مباحث مهم در حوزه تصمیم گیری های مرتبط با سرمایه گذاری و همچنین از مباحث مطروحه در زمینه پژوهش در عملیات هستند. با توجه به اینکه مسائل دنیای واقعی دارای بیش از یک هدف هستند و این اهداف بعضاً در تعارض با هم نیز می باشند، به همین دلیل بهره گیری از رویکردهای مناسب ریاضی برای تحلیل مسائل چند هدفه پیشنهاد شده است (زیدوناس و همکاران، ۲۰۱۷). در این بین بکارگیری رویکردهایی مانند روش فازی و استوار به واسطه در نظر گرفتن محدودیت ها و شرایط غیر قطعی، برای انتخاب پرتفوی سهام بهینه که روش جدیدی برای حل مسائل بهینه سازی چند هدفه است و مبتنی بر سناریوهای بازده آتی در فرآیند تصمیم گیری سرمایه گذاران بر اساس مدل برنامه ریزی خطی و استفاده از ترکیب های وزنی ویژه برای هر سناریو است، می تواند مناسب باشد. به این ترتیب، مطالعات گسترده در زمینه پرتفوی مالی، از نظریه کلاسیک مارکویتز تا رویکردهای نوین فازی و استوار، تلاش کرده اند تا مدل هایی ارائه دهند که ضمن پوشش محدودیت های موجود، قابلیت عملیاتی بیشتری در محیط های واقعی داشته باشند. این پژوهش با بهره گیری از برنامه ریزی استوار، به دنبال ارائه مدلی است که علاوه بر انعطاف پذیری در برابر تغییرات محیطی، توانایی تطبیق با پارامترهای غیر قطعی را نیز داشته باشد. زحمتی و دعایی، ۲۰۲۴، با ارائه پژوهشی با عنوان "مدل تصمیم گیری ترکیبی برای انتخاب بهینه پرتفوی تحت عدم اطمینان بینابینی" از رویکردی ترکیبی در تصمیم گیری برای انتخاب پرتفوی بهینه در شرایط عدم قطعیت استفاده کردند. در این روش، با بهره گیری از تکنیک های چندمعیاره، به تحلیل گزینه های سرمایه گذاری پرداخته و یافته های پژوهش نشان داد که این روش، ابزار مؤثری برای تصمیم گیری در شرایط پیچیده و نامطمئن ارائه می دهد. پژوهش یاداو و همکاران، ۲۰۲۴ با عنوان "رویکرد چندهدفه و چنددوره ای برای انتخاب پرتفوی" به بررسی یک مدل چنددوره ای که تفاوت های نگرشی سرمایه گذاران در شرایط

نامشخص را در نظر می‌گیرد، پرداخته‌اند. نتایج نشان می‌دهد که با اعمال این رویکرد، می‌توان پرتفوی‌هایی طراحی کرد که هم‌زمان با سازگاری با نگرش‌های مختلف، بازدهی مطلوبی نیز داشته باشند. پژوهش دیگری توسط عبدالعظیم و همکاران، ۲۰۲۳، با عنوان "انتخاب پرتفوی سرمایه‌گذاری با مدل نوتروزیفی" به ارائه رویکردی بر اساس تصمیم‌گیری نوتروزیفی برای مدیریت پرتفوی‌های سرمایه‌گذاری در شرایط عدم قطعیت پرداخته‌است. یافته‌ها حاکی از آن است که این روش توانایی بالایی در تحلیل داده‌های پیچیده و کمک به تصمیم‌گیری مناسب دارد. مطالعه تائو و همکاران، ۲۰۲۳ با عنوان "پرتفوی پروژه‌های تولید انرژی" به بررسی انتخاب پروژه‌های مرتبط با تولید انرژی با در نظر گرفتن اثرات هم‌افزایی میان پروژه‌ها و عدم قطعیت اطلاعات پرداخته‌است. نتایج نشان می‌دهد که بهینه‌سازی این انتخاب‌ها می‌تواند بازدهی بالاتری به همراه داشته باشد. دالمولیم و سوزا (۲۰۲۳)، یک الگوریتم متاهوریستیک تحت عنوان MS2PSO را برای انتخاب پرتفوی در بازار سهام برزیل معرفی کرده‌اند. بررسی‌ها حاکی از عملکرد برتر این الگوریتم در مقایسه با روش‌های سنتی بوده و نتایج پرتفوی‌ها متناسب با سطح ریسک سرمایه‌گذاران تنظیم شده‌است. بلایس و العایدین (۲۰۲۳)، از مدل‌های Mean-TVaR برای بهینه‌سازی پرتفوی تحت شرایط عدم اطمینان استفاده کرده‌اند. یافته‌ها بیانگر آن است که این مدل می‌تواند راهکارهایی مؤثر برای تنوع‌بخشی و مدیریت ریسک ارائه دهد. در تحقیقی دیگر، تسای و همکاران (۲۰۲۴)، به بررسی انتخاب پرتفوی آنلاین در شرایطی با توابع هزینه متغیر پرداخته‌اند. یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از روش‌های مبتنی بر داده می‌تواند از ضررهای ناخواسته جلوگیری کند. پژوهش داس و همکاران، ۲۰۲۳، سه استراتژی PSO، الگوریتم ژنتیک و برنامه‌ریزی پویا را در بازار NIFTY 50 مقایسه کرده‌است. نتایج نشان می‌دهد که PSO بهترین تعادل میان سود و ریسک را ارائه می‌کند. ژو و همکاران (۲۰۲۲)، با بررسی یک روش دو مرحله‌ای، تأثیر نسبت شارپ در بهینه‌سازی پرتفوی را ارزیابی کرده‌اند. یافته‌ها حاکی از آن است که این روش با استفاده از یادگیری ترکیبی عملکرد بهتری نسبت به تکنیک‌های سنتی دارد. در پژوهش دیگری، فنگ و همکاران (۲۰۲۳) به بررسی مدل‌های توزیع نامتقارن قدرت برای بهینه‌سازی پرتفوی پرداخته‌اند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که این مدل به کاهش ریسک و افزایش بازده سرمایه‌گذاری کمک می‌کند. در نهایت، فرناندز و همکاران (۲۰۲۳) روش‌های کلاسیک و کوانتومی یادگیری ماشین را برای بهینه‌سازی پرتفوی بررسی کرده و نشان داده‌اند که

الگوریتم‌های کوانتومی زمان پردازش را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهند. همچنین ناسیمنتو و پاچکو (۲۰۲۳)، با استفاده از بهینه‌سازی پارتو و الگوریتم ژنتیک، مدل‌هایی برای انتخاب پروژه‌های نفت و گاز ارائه داده‌اند که توازن بین ریسک و بازده ایجاد می‌کنند. هدف اصلی این تحقیق، تدوین یک رویکرد ترکیبی است که با ارزیابی جامع دارایی‌ها و استفاده از سنج‌های پیشرفته ریسک، به بهینه‌سازی پرتفوی در شرایط عدم اطمینان پردازد. این رویکرد شامل فیلترگذاری سهام، تخصیص بهینه سرمایه و بهره‌گیری از مدل‌های استوار برای مدیریت ریسک است. نتایج این تحقیق می‌تواند به بهبود تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاران و افزایش کارایی مدیریت دارایی در محیط‌های پیچیده و نامطمئن کمک کند. علاوه بر این، این پژوهش علاوه بر بررسی دقیق اصول نظری مرتبط با بهینه‌سازی پرتفوی، با استفاده از روش‌های پیشرفته، به دنبال ارائه یک چارچوب عملی است که بتواند به سرمایه‌گذاران در انتخاب سبد سهام مناسب و کاهش اثرات منفی ریسک کمک کند.

روش تحقیق

مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی سنتی معمولاً بر پایه داده‌های دقیق و قطعی بنا می‌شوند. اما در دنیای واقعی، این فرض اغلب صادق نیست. تغییرات کوچک در پارامترهای یک مدل می‌توانند منجر به نقض محدودیت‌ها و بی اعتبار شدن جواب بهینه شوند. به خصوص در مسائل مالی، عدم قطعیت در مورد بازده دارایی‌ها و سایر پارامترها همواره وجود دارد. در این پژوهش، با بهره‌گیری از تئوری عدم قطعیت، رویکردی نوین برای طراحی پرتفوی بهینه ارائه می‌شود. این رویکرد به جای نادیده گرفتن عدم قطعیت، آن را به‌طور مستقیم در مدل گنجانده و با استفاده از برنامه‌ریزی استوار، راهکاری برای مقابله با آن ارائه می‌دهد. برنامه‌ریزی استوار روشی قدرتمند است که به مدل اجازه می‌دهد تا در برابر تغییرات ناگهانی در داده‌ها مقاوم باشد و همچنان جواب‌های قابل اعتمادی ارائه دهد.

نام‌گذاری‌ها

شاخص‌ها، پارامترها و متغیرهای تصمیم به شرح زیر است:

اندیس‌ها

j : مجموعه‌ای از سهام‌ها $j = 1, \dots$

i : مجموعه‌ای از ورودی‌ها $i = 1, \dots$

r : مجموعه‌ای از خروجی‌ها $r = 1, \dots$

t : مجموعه‌ای از دوره‌ها $t = 1, \dots$

پارامترها

R_{ij} : بازده سهام z^u_m در دوره i^u_m

$\bar{R}_j$: میانگین بازده سهام z^u_m

R_E : معیار یا سطح هدف بازده موردانتظار سبد سهام

σ_j^2 : واریانس سهام z^u_m

σ_{jh} : کوواریانس بین سهام z^u_m و سهام h^u_m

L_{ij} : نرخ رشد سود سهم z^u_m در دوره i^u_m

$\bar{L}_j$: میانگین نرخ رشد سود سهم z^u_m

L_E : معیار یا سطح هدف نرخ رشد سود سبد موردانتظار

k : تعداد سهام مجاز در سبد سهام

A_j : حداقل مبلغ کل وجه قابل سرمایه گذاری در سهام z^u_m

B_j : حداکثر مبلغ کل وجه قابل سرمایه گذاری در سهام z^u_m

x_{i0} : ورودی i^u_m از سهام 0 (سهام تحت رسیدگی)

y_{r0} : خروجی r^u_m از سهام 0 (سهام تحت رسیدگی)

x_{ij} : ورودی i^u_m از سهام z^u_m

y_{rj} : خروجی r^u_m از سهام z^u_m

Γ : سطح محافظه کاری (بودجه عدم قطعیت)

Δ : اختلال در پارامترهای نامشخص

δ_i : سطح اطمینان برای برآوردن محدودیت i^u_m

cb : کارمزد خرید

cs : کارمزد فروش

متغیرهای تصمیم گیری

ω_j : وزن سهام z^u_m در سبد

τ_j : متغیر دودویی که در صورت نگهداری سهام z^u_m یک و در غیر این صورت صفر

خواهد بود.

ξ_t : نیمه واریانس سبد سهام در دوره t^u_m

ζ_t : انحراف مطلق سبد سهام در دوره t^u_m

u_r : وزن برای خروجی $r^{\text{ام}}$

v_i : وزن برای ورودی $i^{\text{ام}}$

W_0 : بازده به مقیاس سهام 0 (سهام مورد بررسی)

مدل‌های سبد سهام و معیارهای ریسک کلاسیک

اولین روش در انتخاب سبد سهام توسط مارکوویتز پیشنهاد شد (مارکوویتز، ۱۹۵۲).

مدل میانگین واریانس (MV) برای حل مسئله انتخاب سبد سهام به شکل زیر است:

$\ominus^{MV}$

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{j=1}^n \omega_j^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{h=j+1}^n \omega_j \omega_h \sigma_{jh} &= \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n \omega_j \omega_h \sigma_{jh} \\ \text{S.t} \quad \sum_{j=1}^n \bar{R}_j \omega_j &\geq R_E \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$$

$$\omega_j \geq 0 \quad \forall j$$

همان‌طور که در مدل (۱) نشان داده شده است، معیار واریانس به عنوان معیار ریسک برای سبد سهام استفاده می‌شود. باید توضیح داد که واریانس به عنوان معیار ریسک برای انتخاب سبد سهام، هر دو بازده مورد انتظار بالا و زیر را جریمه می‌کند. مارکوویتز نیمه‌واریانس را به عنوان معیار ریسک نزولی پیشنهاد کرد؛ که احتمال بازگشت را بازده مورد انتظار زیر تعیین می‌کند. تعریف اندازه‌گیری ریسک نیمه‌واریانس معادل زیر است:

(۲)

$$SV = E \left(\left(\text{Max} \left\{ 0, R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j \right\} \right)^2 \right) = \begin{cases} \left(R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j \right)^2 & \text{if } R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j > 0; \\ 0 & \text{if } R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j \leq 0; \end{cases}$$

برای حل مدل میانگین واریانس، تصمیم‌گیرندگان به ماتریس کوواریانس نیاز دارند؛ که تخمین این ماتریس با داده‌های واقعی دشوار است؛ اما با استفاده از مدل نیمه‌واریانس

¹ mean-variance

میانگین (MSV)، نیازی به محاسبه ماتریس کوواریانس نیست و توزیع مشترک سهام باید محاسبه شود.

از آنجایی که مدل اصلی مارکوویتز یک مدل برنامه‌نویسی درجه دوم (QP) است و حل آن برای مجموعه داده‌های بزرگ دشوار است. کونو و یامازاکی آنحراف مطلق (AD) را به جای واریانس به عنوان معیار ریسک برای انتخاب پورتفولیو پیشنهاد کردند (کونو و یامازاکی، ۱۹۹۱). مدل میانگین انحراف مطلق (MAD) یک مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) است و زمان محاسباتی را کاهش می‌دهد. تعریف انحراف مطلق به صورت معادله (۳) است:

$$AD = \left| R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j \right| = \begin{cases} R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j & \text{if } R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j > 0; \\ \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j - R_E & \text{if } R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j \leq 0; \end{cases} \quad (3)$$

این معیار ریسک انحراف از بازده مورد انتظار را کمی می‌کند و با استفاده از مدل MAD، نیازی به محاسبه ماتریس کوواریانس نیست.

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها

تجزیه و تحلیل پوششی داده‌ها توسط چارنز^۴ و همکاران برای اولین بار ارائه شد (چارنز و همکاران، ۱۹۷۸)؛ که براساس ایده فارل^۵ (۱۹۵۷) است. این روش یک تکنیک ناپارامتریک برای ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری همگن است. چارنز و همکاران اولین مدل DEA را پیشنهاد کردند؛ که براساس فرض بازده ثابت به مقیاس^۶ (CRS) بود و مدل CCR نامیده شد. سپس بانکر^۷ و همکاران مدل CCR را براساس فرض متغیر بازده متغیر به مقیاس (VRS) توسعه دادند و مدل BCC نامیدند (بانکر و همکاران، ۱۹۸۴). چارنز و همکاران مدل DEA را با در نظر گرفتن هم‌زمان کمیته‌سازی ورودی و حداکثرسازی خروجی پیشنهاد کردند؛ که مدل افزودنی^۸ (ADD) نامیده می‌شود (چارنز و همکاران، ۱۹۸۵).

¹ Mean-Semi Variance

² Quadratic Programming

³ Konno & Yamazaki

⁴ Charnes

⁵ Farrell

⁶ Constant Returns to Scale

⁷ Banker

⁸ Additive

$\Theta_{Classic}^{CCR-IO}$

$$Max \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r$$

$$S.t. \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i = 1 \quad (۴)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i \leq 0, \forall j$$

$$u_r, v_i \geq 0, \forall r, i$$

$\Theta_{Classic}^{CCR-OO}$

$$Min \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i$$

$$S.t. \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r = 1 \quad (۵)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i \leq 0, \forall j$$

$$u_r, v_i \geq 0, \forall r, i$$

$\Theta_{Classic}^{BCC-IO}$

$$Max \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r + w_0$$

$$S.t. \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i = 1 \quad (۶)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + w_0 \leq 0, \forall j$$

$$u_r, v_i \geq 0, \forall r, i$$

$\Theta_{Classic}^{BCC-OO}$

$$Min \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i - w_0$$

$$S.t. \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r = 1 \quad (۷)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + w_0 \leq 0, \forall j$$

$$u_r, v_i \geq 0, \forall r, i$$

$$\Theta_{Classic}^{ADD-CRS}$$

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i - \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r$$

$$S.t. \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s y_{rj} u_r \geq 0, \forall j \quad (۸)$$

$$u_r \geq 1, \forall r$$

$$v_i \geq 1, \forall i$$

$$\Theta_{Classic}^{ADD-VRS}$$

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i - \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r - w_0$$

$$S.t. \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s y_{rj} u_r - w_0 \geq 0, \forall j \quad (۹)$$

$$u_r \geq 1, \forall r$$

$$v_i \geq 1, \forall i$$

با توجه به اینکه مدل‌های CCR، BCC و ADD از مدل‌های پایه و پرتفردار DEA هستند، در این تحقیق، مدل CCR ورودی گرا (CCR-IO)، مدل CCR خروجی گرا (CCR-OO)، مدل BCC ورودی گرا (BCC-IO)، مدل BCC خروجی گرا (BCC-OO)، مدل ADD با بازده ثابت به مقیاس (ADD-CRS) و مدل ADD با بازده متغیر به مقیاس (ADD-VRS) اعمال خواهد شد. شکل ضربی مدل‌های CCR-IO، CCR-OO، BCC-IO، BCC-OO، ADD-CRS و ADD-VRS به ترتیب در مدل‌های (۴) تا (۹) معرفی شده‌اند.

بهینه‌سازی استوار

به‌طور کلی در شرایط واقعی، ورودی‌ها و خروجی‌های مدل‌های DEA توسط عدم قطعیت تأثیر می‌پذیرند. عدم دقت پارامترهای ورودی زمانی افزایش می‌یابد که دسترسی کمی به داده‌های قابل اعتماد قدیمی‌تر وجود داشته باشد. در این شرایط، محافظت از استواری ترکیب به‌دست‌آمده از مدل DEA مهم است. در غیر این صورت، کارایی و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری مربوطه ممکن است غیرقابل اعتماد شود و در نتیجه ممکن است هزینه‌های قابل توجهی بر ذینفعان مختلف تحمیل شود. برای جلوگیری از چنین پیامدهای نامطلوبی می‌توان از روش‌های بهینه‌سازی استوار استفاده کرد (پیشوائی و همکاران، ۲۰۱۱). به‌طور واضح گفته می‌شود که یک راه‌حل برای مدل DEA در صورتی

استوار است که تقریباً برای تمام مقادیر ممکن پارامترهای نامشخص امکان‌پذیر باشد و رتبه‌بندی مربوطه باید حداقل تغییرات را برای همه مقادیر ممکن پارامترهای غیردقیق داشته باشد. در این شرایط، یک رویکرد بهینه‌سازی استوار در بدترین حالت برای تعیین پارامترهای نامشخص در مدل DEA اعمال می‌شود (پیشوائی و همکاران، ۲۰۱۲). این رویکرد به داده‌های قبلی فراوان نیازی ندارد و بنابراین می‌توان آن را تقریباً در تمام مسائل واقعی DEA اعمال کرد. علاوه بر این، این روش امکان‌سنجی راه‌حل مدل DEA را برای تمام مقادیر ممکن پارامترهای نامشخص در مجموعه عدم قطعیت محدب فرضی تضمین می‌کند. سوyster^۱ (۱۹۷۳)، بن تال و نمیروسکی^۲ (۲۰۰۰) و برتسیماس و سیم^۳ (۲۰۰۴) یک رویکرد بهینه‌سازی استوار و محبوب در مجموعه عدم قطعیت محدب ارائه کردند.

در روش بهینه‌سازی استوار، برای مقابله با عدم قطعیت در داده‌ها، یک محدودیت خاص a از یک مدل اسمی در نظر گرفته می‌شود و Λ_a مجموعه‌ای از ضرایب در محدودیت a را نشان می‌دهد؛ که در معرض عدم قطعیت هستند. لازم به ذکر است که هر ورودی $b \in \Lambda_a$ به عنوان یک متغیر تصادفی متقارن و محدود مدل شده است؛ که مقادیر در بازه $[\alpha_{ab} - \hat{\alpha}_{ab}, \alpha_{ab} + \hat{\alpha}_{ab}]$ را می‌گیرد. مرکز این بازه در نقطه α_{ab} یک مقدار اسمی است و $\hat{\alpha}_{ab}$ اختلال پارامترهای نامشخص $b \in \Lambda_a$ است. در نهایت، هم‌تایان استوار محدودیت a $(\sum_b \alpha_{ab} \phi_b, \forall a)$ براساس رویکردهای بهینه‌سازی استوار به ترتیب به عنوان معادله‌های (۱۰) تا (۱۳) پیشنهاد می‌شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_b \alpha_{ab} \phi_b + \sum_{b \in \Lambda_a} \hat{\alpha}_{ab} \phi_b \leq \beta_a, \forall a \\ -\phi_b \leq \phi_b - \sigma_{ab} \leq \phi_b, \forall b \\ \phi \geq 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_b \alpha_{ab} \phi_b + \sum_{b \in \Lambda_a} \hat{\alpha}_{ab} \phi_b + \Omega_a \sqrt{\sum_{b \in \Lambda_a} \hat{\alpha}_{ab}^2 \sigma_{ab}^2} \leq \beta_a, \forall a \\ -\phi_{ab} \leq \phi_b - \sigma_{ab} \leq \phi_{ab}, \forall a, b \in \Lambda_b \\ \phi \geq 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

¹ Soyster

² Ben-Tal & Nemirovski

³ Bertsimas & Sim

$$\begin{cases}
 \sum_b \alpha_{ab} \varphi_b + Z_a \Gamma_a + \Omega_a \sum_{b \in \Lambda_a} P_{ab} \leq \beta_a, \forall a \\
 Z_a + P_{ab} \geq \hat{\alpha}_{ab} \varphi_b, \forall a, b \in \Lambda_b \\
 -\phi_b \leq \varphi_b \leq \phi_b, \forall a, b \in \Lambda_b \\
 Z, P, \phi \geq 0
 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases}
 \sum_b \alpha_{ab} \varphi_b + Z_a \Gamma_a + \Omega_a \sum_{b \in \Lambda_a} P_{ab} \leq \beta_a, \forall a \\
 \sum_b \alpha_{ab} \varphi_b + Z_a \Gamma_a + \Omega_a \sum_{b \in \Lambda_a} P_{ab} \geq 0, \forall a \\
 \sum_b \alpha_{ab} \varphi_b + Z_a \Gamma_a + \Omega_a \sum_{b \in \Lambda_a} P_{ab} \leq n \times LC, \forall a \\
 Z_a + P_{ab} \geq \hat{\alpha}_{ab} \varphi_b, \forall a, b \in \Lambda_b \\
 -\phi_b \leq \varphi_b \leq \phi_b, \forall a, b \in \Lambda_b \\
 Z, P, \phi \geq 0
 \end{cases} \quad (13)$$

شایان ذکر است که رویکرد بهینه‌سازی استوار سوییستر بیش از حد محافظه کارانه است. در بن تال و نمیروسکی یک رویکرد استوار پیشنهاد شده؛ اما همتای استوار آن‌ها برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) است؛ که می‌تواند در مسائل واقعی مشکل ساز باشد. اگرچه مدل می‌تواند محافظه کاری را با پارامتر Ω تنظیم کند. رویکرد استوار برتسیماس و سیم می‌تواند به‌طور انعطاف‌پذیر سطح محافظه کاری راه‌حل‌های استوار را با پارامتر Γ تنظیم کند و همتای استوار در رویکرد آن‌ها برنامه‌ریزی خطی (LP) است. مشکل اصلی این روش‌ها این است که، در شرایط واقعی می‌توان برخی از اطلاعات را به‌منظور کنترل بهتر هزینه اضافی ناشی از در نظر گرفتن متغیر پارامتر اضافه کرد. در (جنتایل و همکاران، ۲۰۲۱) این موضوع بررسی شد که چگونه پیش‌بینی را می‌توان همراه با بهینه‌سازی استوار به‌منظور دستیابی به یک برنامه‌ریزی بهینه با توجه به عدم قطعیت‌ها مورد استفاده قرار داد. در این روش از پیش‌بینی در به‌روزرسانی پارامترهای نامشخص مدل استوار استفاده می‌شود. علاوه بر این، بودجه استواری در هر مرحله برنامه‌ریزی شده در یک افق برنامه‌ریزی متحرک بهینه می‌شود. به این ترتیب پارامترهای مدل استوار را می‌توان به‌صورت پویا و اطلاعات را از داده‌ها به روز کرد. با توجه به این ویژگی و خطی بودن همتای استوار در رویکرد (جنتایل و همکاران، ۲۰۲۱)، این رویکرد در این فصل برای مقابله با عدم قطعیت در همه مدل‌ها استفاده خواهد شد؛ که در آن LC آستانه بحرانی سطح سهام و n کسری از سهام مجاز باقی‌مانده است. توجه داریم

¹ Nonlinear Programming

که رویکردهای RO به ترتیب براساس مجموعه‌های عدم قطعیت «box»، «box & ellipsoidal» و «box & polyhedral» ارائه شده‌اند.

رویکرد استوار برای مسئله انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام

در این بخش، رویکرد استوار برای مسئله ایجاد سبد سهام در بازارهای مالی ارائه شده است. این رویکرد شامل دو مرحله است که در ادامه مراحل هر فاز به طور کامل توضیح داده می‌شود.

فاز اول: انتخاب سهام‌ها

در این فاز طی شش مرحله، عملکرد کلیه سهامی که سرمایه‌گذاران می‌توانند در آن‌ها سرمایه‌گذاری کنند، ارزیابی و اندازه‌گیری می‌شود. در پایان این مرحله، تنها سهام‌هایی که از فیلتر سرمایه‌گذار عبور می‌کنند، صلاحیت کاندید بودن سرمایه‌گذاری در فاز دوم را دارند.

انتخاب یک مدل تحلیل پوششی داده‌ها

در مرحله اول فاز یک، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی سهام‌ها انتخاب می‌شوند. در این تحقیق مدل‌های BCC-IO، CCR-IO، BCC-OO، CCR-OO، ADD-VRS و ADD-CRS انتخاب شده‌اند. قابل ذکر است، تمام مدل‌های DEA که در این مطالعه استفاده می‌شوند، در بخش‌های قبل ارائه شده‌اند.

انتخاب معیار مالی برای ارزیابی سهام

در مرحله دوم فاز یک، معیارهای مالی برای ارزیابی سهام از دیدگاه‌های مختلفی انتخاب می‌شوند؛ که در بازار سهام شامل بازده، ریسک، سودآوری، نقدینگی، اهرم، ارزش‌گذاری و رشد است. به طور سنتی، معیارهای مالی از مقادیر عددی استخراج شده از صورت‌های مالی برای به دست آوردن اطلاعات در مورد یک شرکت استفاده می‌کنند. اعداد موجود در صورت‌های مالی یک شرکت شامل ترازنامه، صورت‌های درآمد و جریان نقدی برای انجام تجزیه و تحلیل کمی در ارزیابی نقدینگی، اهرم، رشد، حاشیه، سودآوری، نرخ بازده، ارزش‌گذاری و موارد دیگر شرکت استفاده می‌شود. تجزیه و تحلیل دو هدف اصلی را دنبال می‌کند: پیگیری و قضاوت مقایسه‌ای در مورد عملکرد شرکت.

جدول ۱: ورودی‌ها و خروجی‌های مدل‌های DEA

معیار مالی	سمبول	توصیف
نسبت قیمت به درآمد (P/E)	$I(1)$	قیمت سهام تقسیم بر سود خالص هر سهم
نسبت رشد سریع	$I(2)$	کل دارایی‌های جاری منهای موجودی تقسیم بر کل بدهی‌های جاری
نسبت پرداخت بدهی-II	$I(3)$	کل بدهی تقسیم بر حقوق صاحبان سهام
بتا (β)	$I(4)$	ریسک سیستماتیک
انحراف معیار (σ)	$I(5)$	ریسک غیر سیستماتیک
سود هر سهم (EPS)	$O(1)$	درآمد خالص منهای سود تقسیمی بر سهام عادی
نرخ بازده	$O(2)$	نسبت سود یا زیان یک سرمایه‌گذاری در یک دوره معین
نرخ نقدینگی	$O(3)$	توانایی خرید یا فروش سریع سهام در بازار
نرخ رشد سود هر سهم	$O(4)$	EPS سه ماهه فعلی تقسیم بر EPS سه ماهه قبلی منهای یک

ورودی‌ها

خروجی‌ها

جدول ۲: ورودی‌ها و خروجی‌های مدل‌های DEA

معیار مالی	سمبول	توصیف
نسبت ارزش شبکه به تراکش ها (NVT)	$I(1)$	رابطه بین ارزش بازار و حجم انتقال
نسبت سهام به جریان (S2F)	$I(2)$	نسبت بین موجودی فعلی دارایی و جریان تولید جدید
شاخص قدرت نسبی (RSI)	$I(3)$	مقیاس نوسانات اخیر قیمت
انحراف معیار (σ)	$I(4)$	ریسک غیر سیستماتیک
سود هر سهم (EPS)	$O(1)$	درآمد خالص منهای سود تقسیمی بر سهام عادی
نرخ بازده	$O(2)$	نسبت سود یا زیان یک سرمایه‌گذاری در یک دوره معین
حجم در تعادل (OBV)	$O(3)$	تکانه
نرخ رشد سود هر سهم	$O(4)$	EPS سه دوره فعلی تقسیم بر EPS سه دوره قبلی منهای یک

خروجی‌ها

معیار مالی	سمبول	توصیف
شاخص جهت دار متوسط (ADX)	$O(5)$	قدرت یک روند

انتخاب یک رویکرد بهینه‌سازی استوار

در مرحله سوم فاز یک، با توجه به نقاط ضعف و قوت رویکردهای استوار، رویکرد (B&S) برای مقابله با پارامترهای نامشخص در مدل‌های DEA انتخاب شده‌اند. لازم به ذکر است که فرمول همتای استوار در رویکرد استوار B&S در بخش قبل ارائه شده است.

ارائه مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار (RDEA)

در مرحله چهارم فاز یک، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های استوار پیشنهاد شده است. این مرحله مهم‌ترین مرحله در فاز اول است. به منظور در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترهای ورودی و خروجی در مدل‌های DEA بر اساس رویکرد استوار، در درجه اول، همه محدودیت‌ها به محدودیت‌های کمتر یا مساوی تبدیل می‌شوند. در هر یک از مدل‌های CCR-IO، CCR-OO، BCC-IO و BCC-OO نحوه تبدیل محدودیت مساوی به محدودیت‌های کمتر یا مساوی به ترتیب در ادامه مورد بحث قرار خواهد گرفت.

شکل فشرده (CF) مدل CCR-IO به صورت رابطه (۱۴) است. اگر $vx_0 = 1$ به

$vx_0 \leq 1$ تبدیل شود، جواب بهینه تغییر نمی‌کند:

$$\begin{aligned} & \Theta_{Classic(CF)}^{CCR-IO} \\ & \text{Max } uy_0 \\ & \text{S.t. } vx_0 = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$uy_j - vx_j \leq 0, \forall j$$

$$u, v \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \text{Max } uy_0 \\ & \text{S.t. } vx_0 \leq 1 \\ & uy_j - vx_j \leq 0, \forall j \end{aligned} \quad (15)$$

$$u, v \geq 0$$

قضیه یک: جواب بهینه مدل (۱۴) برابر با مدل (۱۵) است.

شکل فشرده مدل CCR-OO به صورت رابطه (۱۶) است. اگر $uy_0 = 1$ به $uy_0 \geq 1$

تبدیل شود، جواب بهینه تغییر نمی‌کند.

¹ Compact Form

$$\Theta_{Classic(CF)}^{CCR-OO}$$

$$Max \ vx_0$$

$$S.t. \ uy_0 = 1 \quad (۱۶)$$

$$uy_j - vx_j \leq 0, \forall j$$

$$u, v \geq 0$$

$$Max \ vx_0$$

$$S.t. \ uy_0 \geq 1 \quad (۱۷)$$

$$uy_j - vx_j \leq 0, \forall j$$

$$u, v \geq 0$$

قضیه دو: جواب بهینه مدل (۱۶) برابر با مدل (۱۷) است.

شکل فشرده مدل BCC-IO به صورت رابطه (۱۸) است. اگر $vx_0 = 1$ به $vx_0 \geq 1$

تبدیل شود، جواب بهینه تغییر نمی کند.

$$\Theta_{Classic(CF)}^{BCC-IO}$$

$$Max \ uy_0 + w_0$$

$$S.t. \ vx_0 = 1 \quad (۱۸)$$

$$uy_j - vx_j + w_0 \leq 0, \forall j$$

$$u, v \geq 0$$

$$Max \ uy_0 + w_0$$

$$S.t. \ vx_0 \leq 1 \quad (۱۹)$$

$$uy_j - vx_j + w_0 \leq 0, \forall j$$

$$u, v \geq 0$$

قضیه سه: جواب بهینه مدل (۱۸) برابر با مدل (۱۹) است.

شکل فشرده مدل BCC-OO به صورت رابطه (۲۰) است. اگر $uy_0 = 1$ به $uy_0 \geq 1$

تبدیل شود، جواب بهینه تغییر نمی کند.

$$\Theta_{Classic(CF)}^{BCC-OO}$$

$$Max \ vx_0 - w_0$$

$$S.t. \ uy_0 = 1 \quad (۲۰)$$

$$uy_j - vx_j + w_0 \leq 0, \forall j$$

$$u, v \geq 0$$

$$\begin{aligned}
& \text{Max } vx_0 - w_0 \\
& \text{S.t. } uy_0 \geq 1 \\
& uy_j - vx_j + w_0 \leq 0, \forall j \\
& u, v \geq 0
\end{aligned} \quad (21)$$

قضیه چهار: جواب بهینه مدل (۲۰) برابر با مدل (۲۱) است.

اکنون، با توجه به رویکرد استوار B&S، تمام مدل‌های DEA استوار در این تحقیق که شامل RADD-CRS، RBCC-OO، RBCC-IO، RCCR-OO، RCCR-IO و RADD-VRS هستند؛ به شکل مدل‌های زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
& \Theta_{Robust}^{CCR-IO} \\
& \text{Max } \Psi \\
& \text{S.t. } \Psi - \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r + Z_0^y \Gamma_0^y + \sum_{r=1}^s P_{r0}^x \leq 0 \\
& \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i + Z_0^x \Gamma_0^x + \sum_{i=1}^m P_{i0}^x \leq 1 \\
& \sum_{i=1}^s y_{ij} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + Z_j \Gamma_j + \sum_{r=1}^s P_{rj}^y + \sum_{i=1}^m P_{ij}^x \leq 0, \forall j \quad (22) \\
& Z_0^y + P_{r0}^y \geq \Delta y_{r0} u_r, \forall r \\
& Z_0^x + P_{i0}^x \geq \Delta x_{i0} v_i, \forall i \\
& Z_j + P_{rj}^y \geq \Delta y_{rj} u_r, \forall j, r \\
& Z_j + P_{ij}^x \geq \Delta x_{ij} v_i, \forall j, i \\
& Z_0^x, Z_0^y, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \geq 0, \forall j, r, i
\end{aligned}$$

$$\Theta_{Robust}^{CCR-OO}$$

$$Min \Psi$$

$$\begin{aligned}
 S.t. \quad & \sum_{r=1}^m x_{i0} v_i + Z_0^x \Gamma_0^x + \sum_{r=1}^m P_{i0}^x - \Psi \leq 0 \\
 & -\sum_{i=1}^s y_{r0} u_r + Z_0^y \Gamma_0^y + \sum_{r=1}^s P_{r0}^y \leq -1 \\
 & \sum_{i=1}^s y_{rj} u_r + \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + Z_j \Gamma_j + \sum_{r=1}^s P_{rj}^y + \sum_{i=1}^m P_{ij}^x \leq 0, \forall j \quad (23) \\
 & Z_0^x + P_{i0}^x \geq \Delta x_{i0} v_i, \forall i \\
 & Z_0^y + P_{r0}^y \geq \Delta y_{r0} u_r, \forall r \\
 & Z_j + P_{rj}^y \geq \Delta y_{rj} u_r, \forall j, r \\
 & Z_j + P_{ij}^x \geq \Delta x_{ij} v_i, \forall j, i \\
 & Z_0^x, Z_0^y, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \geq 0, \forall j, r, i
 \end{aligned}$$

$$\Theta_{Robust}^{BCC-IO}$$

$$Min \Psi$$

$$\begin{aligned}
 S.t. \quad & \Psi - \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r - w_0 + Z_0^y \Gamma_0^y + \sum_{r=1}^s P_{r0}^y \leq 0 \\
 & \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i + Z_0^x \Gamma_0^x + \sum_{i=1}^m P_{i0}^x \leq 1 \\
 & \sum_{i=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + w_0 + Z_j \Gamma_j + \sum_{r=1}^s P_{rj}^y + \sum_{i=1}^m P_{ij}^x \leq 0, \forall j \quad (24) \\
 & Z_0^y + P_{r0}^y \geq \Delta y_{r0} u_r, \forall r \\
 & Z_0^x + P_{i0}^x \geq \Delta x_{i0} v_i, \forall i \\
 & Z_j + P_{rj}^y \geq \Delta y_{rj} u_r, \forall j, r \\
 & Z_j + P_{ij}^x \geq \Delta x_{ij} v_i, \forall j, i \\
 & Z_0^x, Z_0^y, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \geq 0, \forall j, r, i
 \end{aligned}$$

Θ_{Robust}^{BCC-OO}

Min Ψ

$$\begin{aligned}
 S.t. \quad & \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i - w_0 + Z_0^x \Gamma_0^x + \sum_{i=1}^m P_{i0}^x - \Psi \leq 0 \\
 & - \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r + Z_0^y \Gamma_0^y + \sum_{r=1}^s P_{r0}^y \leq -1 \\
 & \sum_{i=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + w_0 + Z_j \Gamma_j + \sum_{r=1}^s P_{rj}^y + \sum_{i=1}^m P_{ij}^x \leq 0, \forall j \quad (25) \\
 & Z_0^x + P_{i0}^x \geq \Delta x_{i0} v_i, \forall i \\
 & Z_0^y + P_{r0}^y \geq \Delta y_{r0} u_r, \forall r \\
 & Z_j + P_{rj}^y \geq \Delta y_{rj} u_r, \forall j, r \\
 & Z_j + P_{ij}^x \geq \Delta x_{ij} v_i, \forall j, i \\
 & Z_0^x, Z_0^y, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \geq 0, \forall j, r, i
 \end{aligned}$$

$\Theta_{Robust}^{ADD-CRS}$

Min Ψ

$$\begin{aligned}
 S.t. \quad & - \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r + \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i + Z_0 \Gamma_0 + \sum_{r=1}^s P_{r0}^y + \sum_{i=1}^m P_{i0}^x - \Psi \leq 0 \\
 & \sum_{i=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + Z_j \Gamma_j + \sum_{r=1}^s P_{rj}^y + \sum_{i=1}^m P_{ij}^x \leq 0, \forall j \\
 & u_r \geq 1, \forall r \\
 & v_i \geq 1, \forall i \quad (26) \\
 & Z_0 + P_{r0}^y \geq \Delta y_{r0} u_r, \forall r \\
 & Z_0 + P_{i0}^x \geq \Delta x_{i0} v_i, \forall i \\
 & Z_j + P_{rj}^y \geq \Delta y_{rj} u_r, \forall j, r \\
 & Z_j + P_{ij}^x \geq \Delta x_{ij} v_i, \forall j, i \\
 & Z_0, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \geq 0, \forall j, r, i
 \end{aligned}$$

$\Theta_{Robust}^{ADD-VRS}$
 $Min \Psi$

$$S.t. - \sum_{r=1}^s y_{r0} u_r + \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i - w_0 + Z_0 \Gamma_0 + \sum_{r=1}^s P_{r0}^y + \sum_{i=1}^m P_{i0}^x - \Psi \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + w_0 + Z_j \Gamma_j + \sum_{r=1}^s P_{rj}^y + \sum_{i=1}^m P_{ij}^x \leq 0, \forall j$$

$$u_r \geq 1, \forall r$$

$$v_i \geq 1, \forall i$$

(۲۷)

$$Z_0 + P_{r0}^y \geq \Delta y_{r0} u_r, \forall r$$

$$Z_0 + P_{i0}^x \geq \Delta x_{i0} v_i, \forall i$$

$$Z_j + P_{rj}^y \geq \Delta y_{rj} u_r, \forall j, r$$

$$Z_j + P_{ij}^x \geq \Delta x_{ij} v_i, \forall j, i$$

$$Z_0, Z_j, P_{r0}^y, P_{rj}^y, P_{i0}^x, P_{ij}^x, u_r, v_i \geq 0, \forall j, r, i$$

توجه داریم که در این مرحله، شش مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار (RDEA) که در زمینه DEA رایج هستند، پیشنهاد شده است.

اجرای مدل RDEA برای Γ و Δ دلخواه

در مرحله پنجم فاز یک، مدل DEA استوار با در نظر گرفتن سطح محافظه کاری Γ و اغتشاش Δ برای اندازه‌گیری عملکرد همه سهام‌ها اجرا خواهد شد. همچنین با اعمال مدل RDEA تمامی سهام‌ها رتبه‌بندی خواهند شد. برای اینکه محدودیت i با حداکثر احتمال δ_i نقض شود، کافی است Γ_i را حداقل برابر معادله (۲۸) انتخاب کنید:

$$1 - \delta_i = 1 - \Phi\left(\frac{\Gamma_i - 1}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow \Gamma_i = 1 + \Phi_{(1-\delta_i)}^{-1} \sqrt{n} \quad (28)$$

که Φ توزیع تجمعی، تابعی از متغیر استاندارد گاوسی و n تعداد پارامترهای نامشخص در محدودیت i است.

انتخاب سهام برتر از فاز اول

در مرحله ششم فاز یک، با توجه به محدودیت کاردینالیتی $\sum \tau_j = k$ برای انتخاب سبد سهام در فاز دوم، k سهام برتر که واجد شرایط عبور از فاز اول به فاز دوم هستند، انتخاب خواهند شد. دیدگاه محافظه کارانه برای انتخاب بهترین سهام در مرحله اول بدین گونه است که k سهام برتر بر اساس میانگین رتبه هر سهم در تمام مدل‌های RDEA شامل RCCR-

IO, RCCR-OO, RBCC-IO, RBCC-OO, RADD-CRS و RADD- VRS انتخاب می‌شوند.

فاز دوم: بهینه‌سازی سبد سهام

در این فاز با پنج مرحله، میزان سرمایه‌گذاری در هر سهم واجد شرایط تعیین و در نهایت سبد ایجاد می‌شود. به عبارت دیگر، در این مرحله واحد تصمیم‌گیری برای وزن سهام واجد شرایط از مرحله اول در سبد تصمیم می‌گیرد.

پیشنهاد مدل بهینه‌سازی سبد سهام برای سهام واجد شرایط

در مرحله اول فاز دوم، دو مدل بهینه‌سازی سبد سهام با در نظر گرفتن ریسک، بازده و نرخ رشد سود ارائه خواهد شد. در مدل اول نیمه واریانس و در مدل دوم انحراف مطلق به ترتیب معیارهای ریسک هستند (RMSVG و RMADG). برای در نظر گرفتن بازده و نرخ رشد سود، دو محدودیت به هر مدل اضافه می‌شود؛ که دستیابی به حداقل بازده مورد انتظار و حداقل نرخ رشد سود مورد انتظار سرمایه‌گذار را تضمین می‌کند. همچنین برای تدوین مدل پوششی محدودیت بازار مالی، محدودیت کاردینالیتی و محدودیت خرید باید در نظر گرفته شود.

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_t^2 \\
 & S.t. \quad \sum_{j=1}^n \bar{R}_j \omega_j \geq R_E \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \bar{L}_j \omega_j \geq L_E \\
 & \quad \xi_t \geq R_E - \sum_{j=1}^n R_{tj} \omega_j, \forall t \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \omega_j = 1 \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \tau_j = k \\
 & \quad A_j \tau_j \leq \omega_j \leq B_j \tau_j, \forall j \\
 & \quad \tau_j \in \{0, 1\}, \forall j \\
 & \quad \xi_t, \omega_j \geq 0, \forall t, j
 \end{aligned} \tag{۲۹}$$

$$\begin{aligned}
& \min \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_t \\
& S.t. \quad \sum_{j=1}^n \bar{R}_j \omega_j \geq R_E \\
& \quad \sum_{j=1}^n \bar{L}_j \omega_j \geq L_E \\
& \quad \zeta_t \geq R_E - \sum_{j=1}^n R_{jt} \omega_j, \forall t \\
& \quad \zeta_t \geq \sum_{j=1}^n R_{jt} \omega_j - R_E, \forall t \\
& \quad \sum_{j=1}^n \omega_j = 1 \\
& \quad \sum_{j=1}^n \tau_j = k \\
& \quad A_j \tau_j \leq \omega_j \leq B_j \tau_j, \forall j \quad (30) \\
& \quad \tau_j \in \{0, 1\}, \forall j
\end{aligned}$$

شایان ذکر است که در مدل‌ها محدودیت کاردینالیتی $\sum \tau_j = k$ برای انتخاب سبد سهام توسط فاز اول ارضا می‌شود.

انتخاب یک رویکرد بهینه‌سازی استوار

در مرحله دوم فاز دو، رویکرد استوار برای برخورد با داده‌ها و پارامترهای نامشخص در مدل انتخاب می‌شود. لازم به ذکر است که فرمولاسیون همتای استوار در رویکرد استوار B&S در بخش قبلی ارائه شده است.

ارائه مدل بهینه‌سازی سبد سهام استوار (RPO)

در مرحله سوم فاز دو، مدل‌های بهینه‌سازی پرتفولیوی استوار پیشنهاد خواهد شد. این مرحله مهم‌ترین مرحله در فاز دو است. با توجه به رویکرد استوار B&S، مدل به شکل مدل‌های جدید زیر پیشنهاد می‌شود:

(۳۱)

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_t^2 + \left(\sum_{j=1}^n \max \left(0, \left(\omega_{i(t-1)} - \omega_{i(t)} \right) cs \right) + \sum_{j=1}^n \max \left(0, \left(\omega_{i(t)} - \omega_{i(t-1)} \right) cs \right) \right) \\
 & S.t. \quad -\sum_{j=1}^n \bar{R}_j \omega_j + Z^{\bar{R}} \Gamma^{\bar{R}} + \sum_{j=1}^n P_j^{\bar{R}} \leq -R_E \\
 & \quad -\sum_{j=1}^n \bar{L}_j \omega_j + Z^{\bar{L}} \Gamma^{\bar{L}} + \sum_{j=1}^n P_j^{\bar{L}} \leq -L_E \\
 & \quad R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j + Z_j^R \Gamma_j^R + \sum_{j=1}^n P_{ij}^R \leq \xi_t, \forall t, j \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \omega_j = 1 \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \tau_j = k \\
 & \quad Z^{\bar{R}} + P_j^{\bar{R}} \geq \Delta \bar{R}_j \omega_j, \forall j \\
 & \quad Z^{\bar{L}} + P_j^{\bar{L}} \geq \Delta \bar{L}_j \omega_j, \forall j \\
 & \quad Z_j^{R_1} + P_{ij}^{R_1} \geq \Delta R_{ij} \omega_j, \forall t, j \\
 & \quad Z_j^{R_2} + P_{ij}^{R_2} \geq \Delta R_{ij} \omega_j, \forall t, j \\
 & \quad Z^{\bar{R}}, Z^{\bar{L}}, Z_j^{R_1}, Z_j^{R_2}, P_j^{\bar{R}}, P_j^{\bar{L}}, P_{ij}^R \geq 0, \forall t, j \\
 & \quad A_j \tau_j \leq \omega_j \leq B_j \tau_j, \forall j \\
 & \quad \tau_j \in \{0, 1\}, \forall j \\
 & \quad \xi_t, \omega_j \geq 0, \forall t, j
 \end{aligned}$$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
رتال جامع علوم انسانی

(۳۲)

$$\begin{aligned}
& \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \zeta_t + \left(\sum_{j=1}^n \max \left(0, \left(\omega_{i(t-1)} - \omega_{i(t)} \right) cs \right) + \sum_{j=1}^n \max \left(0, \left(\omega_{i(t)} - \omega_{i(t-1)} \right) cs \right) \right) \\
& S.t. \quad -\sum_{j=1}^n \bar{R}_j \omega_j + Z^{\bar{R}} \Gamma^{\bar{R}} + \sum_{j=1}^n P_j^{\bar{R}} \leq -R_E \\
& \quad -\sum_{j=1}^n \bar{L}_j \omega_j + Z^{\bar{L}} \Gamma^{\bar{L}} + \sum_{j=1}^n P_j^{\bar{L}} \leq -L_E \\
& \quad R_E - \sum_{j=1}^n R_{ij} \omega_j + Z_j^R \Gamma_j^R + \sum_{j=1}^n P_{ij}^R \leq \zeta_t, \forall t, j \\
& \quad \sum_{j=1}^n \omega_j = 1 \\
& \quad \sum_{j=1}^n \tau_j = k \\
& \quad Z^{\bar{R}} + P_j^{\bar{R}} \geq \Delta \bar{R}_j \omega_j, \forall j \\
& \quad Z^{\bar{L}} + P_j^{\bar{L}} \geq \Delta \bar{L}_j \omega_j, \forall j \\
& \quad Z_j^{R_1} + P_{ij}^{R_1} \geq \Delta R_{ij} \omega_j, \forall t, j \\
& \quad Z_j^{R_2} + P_{ij}^{R_2} \geq \Delta R_{ij} \omega_j, \forall t, j \\
& \quad Z^{\bar{R}}, Z^{\bar{L}}, Z_j^{R_1}, Z_j^{R_2}, P_j^{\bar{R}}, P_j^{\bar{L}}, P_{ij}^R \geq 0, \forall t, j \\
& \quad A_j \tau_j \leq \omega_j \leq B_j \tau_j, \forall j \\
& \quad \tau_j \in \{0, 1\}, \forall j \\
& \quad \zeta_t, \omega_j \geq 0, \forall t, j
\end{aligned}$$

اجرای مدل RPS برای رسیدن به Γ و Δ دلخواه

در مرحله چهارم فاز دو، مدل بهینه‌سازی سبد سهام استوار با در نظر گرفتن سطح مطلوب محافظه‌کاری Γ و اختلال Δ اجرا می‌شود تا وزن سهام واجد شرایط به دست آمده از فاز اول محاسبه شود. همانند مرحله پنجم فاز یک، برای اینکه محدودیت i با احتمال حداکثر δ_i نقض شود، کافی است Γ_i را حداقل برابر با معادله (۲۸) انتخاب شود.

ساخت سبد سهام با اوزان مدل RPO

در مرحله پنجم فاز دو، در نهایت با توجه به وزن‌های k سهام برتر در مدل، سبد سرمایه‌گذار موردنظر ساخته می‌شود. لازم به ذکر است که با تغییر حداقل بازده و حداقل نرخ رشد سود موردانتظار سرمایه‌گذار، مرز مؤثر ایجاد خواهد شد.

نتایج

در این بخش نتایج حاصل از ساخت پرتفولیو در مورد مطالعاتی واقعی ارائه می‌شود. بورس اوراق بهادار یکی از جذاب‌ترین بازارها با تعداد زیادی از سرمایه‌گذاران است؛ بنابراین ابتدا به معرفی داده‌های تحقیق خواهیم پرداخت و سپس نتایج آزمایش بر روی آن‌ها ارائه می‌گردد.

مطالعه موردی و نتایج عددی

اجرای رویکرد پیشنهادی این پژوهش برای مسئله ساخت پرتفوی، برای یک مطالعه موردی واقعی از بورس اوراق بهادار تهران (TSE) مبتنی بر انتخاب سهام منتخب بر اساس داده‌های شرکت‌های نمونه انجام شده است.

نتایج حاصل از مدل‌ها و مقایسه

در مدل بهینه‌سازی سبد، ما حداکثر تعداد سهام (k) را برابر با ۱۰ در نظر گرفته‌ایم. این سهام بر اساس میانگین رتبه‌بندی انتخاب می‌شوند. پس از این مرحله، مدل پیشنهادی ما با رویکرد استوار اجرا می‌شود. برای اطمینان از برآورده شدن محدودیت‌های مدل با سطح اطمینان ۹۰ درصد، پارامتر محافظه‌کاری (Γ) را ۰/۵۵ تعیین کرده‌ایم. همچنین، برای افزایش بازده مورد انتظار، میزان نوسانات مجاز (Δ) را روی ۰/۰۵ تنظیم کرده‌ایم. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش بازده مورد انتظار، ریسک سرمایه‌گذاری نیز افزایش می‌یابد.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

جدول ۳: بازده سهام‌ها در هر دوره

دوره	سهام‌های منتخب از فاز یک									
	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۱	۰/۰۰۹۸۵	۰/۰۰۰۸۵	۰/۰۲۱۲۵	۰/۰۰۷۱۲	۰/۰۰۰۹۸	۰/۰۲۱۸۵	۰/۰۱۱۲۵	۰/۰۰۲۵۴	۰/۰۱۴۵۸	۰/۰۰۱۹۵
۲	۰/۰۱۲۵۴	۰/۰۰۱۲۱	۰/۰۴۹۸۵	۰/۰۱۲۵۸	۰/۰۱۲۷۸	۰/۰۰۲۱۴	۰/۰۰۱۸۴	۰/۰۱۹۸۵	-۰/۰۰۹۲۵	۰/۰۱۱۲۷
۳	۰/۰۱۱۲۵	۰/۰۰۳۲۱	۰/۰۴۹۸۵	۰/۰۳۰۲۵	۰/۰۰۵۹۸	۰/۰۴۱۵۱	۰/۰۴۱۲۵	-۰/۰۱۲۱۵	۰/۰۲۰۱۵	۰/۰۰۹۲۱
۴	۰/۰۵۵۸۱	۰/۰۰۹۰۱	۰/۰۴۵۶۹	۰/۰۵۲۱۴	۰/۰۸۱۲۵	۰/۰۶۱۲۴	۰/۰۲۱۴۵	-۰/۰۰۹۵۱	۰/۰۳۲۱۸	۰/۰۱۹۵۱
۵	۰/۰۱۱۲۵	۰/۰۰۲۵۴	-۰/۰۰۱۲۵	-۰/۰۰۵۲۸	۰/۰۰۵۹۸	-۰/۰۰۸۲۱	-۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۰۲۱۴	۰/۰۱۴۷۱	۰/۰۱۹۶۲
۶	۰/۰۲۹۹۱	۰/۰۰۲۱۵	-۰/۰۰۸۷۴	۰/۰۰۵۴۱	۰/۰۰۹۸۵	۰/۰۰۲۰۱	۰/۰۰۰۹۸	۰/۰۰۹۵۸	-۰/۰۲۱۴۵	-۰/۰۰۲۱۴
۷	۰/۰۴۲۱۵	۰/۰۰۲۱۵	۰/۰۰۱۲۵	۰/۰۱۹۲۸	۰/۰۰۱۲۸	۰/۰۴۵۱۲	۰/۰۲۵۴۸	۰/۰۱۰۲۱	۰/۰۲۱۴۵	۰/۰۰۲۴۱
۸	۰/۰۶۲۱۵	۰/۰۰۰۱۱	۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۵۲۴۸	۰/۰۱۲۵۸	۰/۰۲۴۵۸	۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۰۱۱۲	۰/۰۱۲۴۵	۰/۰۱۴۸۴
۹	۰/۰۱۸۵۲	۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۶۱۵۴	۰/۰۳۸۷۵	۰/۰۱۹۹۸	۰/۰۲۱۵۸	۰/۰۱۰۰۱	۰/۰۱۲۱۵	۰/۰۲۱۹۸	۰/۰۲۱۵۴
۱۰	-۰/۰۰۰۱۲	۰/۰۲۱۰۱	-۰/۰۰۴۱۸	۰/۰۱۰۲۵	۰/۰۱۹۹۸	۰/۰۰۵۲۱	-۰/۰۰۰۹۲	۰/۰۰۳۱۸	۰/۰۱۱۲۴	-۰/۰۰۲۱۵
۱۱	۰/۰۰۳۲۵	۰/۰۰۱۷۵	-۰/۰۱۰۲۵	-۰/۰۰۵۸۹	۰/۰۰۰۸۷	-۰/۰۲۵۴۸	۰/۰۰۲۵۴	۰/۰۳۱۲۵	-۰/۰۰۴۱۲	۰/۰۱۸۴۵

دوره	سهام‌های منتخب از فاز یک									
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۲	۰/۰۰۲۵۴	۰/۰۰۱۴۸	۰/۰۰۵۱۲	-۰/۰۰۱۹۸	۰/۰۰۶۱۲	۰/۰۰۸۵۴	۰/۰۱۹۸۵	-۰/۰۰۳۲۸	۰/۰۶۰۱۱	۰/۰۰۱۲۴
میانگین	-۰/۰۰۲۱۵	۰/۰۲۱۵۴	۰/۰۶۲۸۷	۰/۰۰۹۸۵	۰/۰۱۵۸۹	۰/۰۱۰۵۶	۰/۰۱۹۸۹	۰/۰۱۵۲۴	۰/۰۱۲۵۱	۰/۰۱۹۳۵

جدول ۴: نرخ رشد سود سهام‌ها در هر دوره.

دوره	سهام منتخب از فاز یک									
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۸/۶۸	۱۱/۰۱	۹/۴۴	۸/۶۳	۶/۹۳	۱۰/۰۴	۷/۱۳	۱۳/۴۸	۱۴/۴۹	۶/۳۷
۲	۱۲/۰۸	۸/۴	۸/۹۵	۱۳/۹۶	۱/۹۹	۲/۲۲	۱/۲۸	۱۲/۶۶	۱۱/۸۹	۱۳/۱۸
۳	۱۴/۷	۱۲/۱۹	۷/۴۶	۱۱/۹۳	۲/۶۶	۹/۹۶	۳/۰۱	۱۴/۲۳	۸/۳۱	۶/۸۱
۴	۴/۷	۱۱/۸۴	۷/۳۹	۸/۹۶	۱/۲۶	۹/۶۵	۹/۵۷	۹/۶۴	۱۴/۲۱	۱۰/۵۵
۵	۶/۰۳	۷/۱۲	۱۰/۷۷	۱/۸۴	۱۰/۳۳	۱۰/۳۹	۳/۹۵	۲/۸	۵/۴۲	۶/۰۹
۶	۸/۹۸	۷/۱۴	۱۴/۸۴	۲/۴۳	۳/۹۲	۳/۲۶	۱۰/۱۴	۴/۵۵	۷/۵۳	۴/۴۲

دوره	سهام منتخب از فاز یک									
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۷	۳/۲۳	۲/۵۵	۱۰/۱۹	۲/۹۳	۳/۷۵	۶/۱۶	۱۲/۴۹	۲/۳۶	۱۲/۷۳	۲/۳۵
۸	۱۴/۶۷	۷/۵۶	۱۴/۶۷	۹/۴۷	۱۱/۳۵	۱/۵۵	۴/۹۶	۲/۶۸	۵/۱۵	۲/۶۶
۹	۵/۴۵	۶/۸	۱/۹	۱۰/۶۹	۸/۹۳	۴/۷۲	۸/۳۳	۲/۳۲	۹/۰۶	۱۴/۰۱
۱۰	۵/۴۶	۱۰/۳۴	۲/۸۵	۱۱/۰۳	۵/۰۵	۳/۵۶	۹/۲۱	۱/۲۸	۱۲/۶۱	۱/۰۷
۱۱	۱۰/۴۹	۴/۷۸	۱۱/۲۹	۱۴/۴۷	۴/۴۸	۹/۰۷	۹/۲۹	۹/۰۱	۴/۱۲	۱۴/۳۴
۱۲	۷/۲۶	۱۲/۸۵	۱۰/۷۹	۵/۱۶	۱۲/۳۹	۶/۵۵	۱۳/۳۴	۹/۱۴	۱۳/۳۴	۱۰/۷

جدول ۵: نتایج مدل میانگین نیم واریانس بازده (RMSVG)

ریسک (SV) پرتفو	وزن سهام‌های منتخب از فاز اول										بازده مورد انتظار	نرخ رشد سود مورد انتظار
	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱		
۰/۰۰۳۰	۰/۰۶۲۲۷۱	۰/۱۵۶۴۹۸	۰/۱۴۴۸۲۳	۰/۰۷۱۰۶۴	۰/۱۰۴۸۹۳	۰/۰۶۸۸۰۱	۰/۰۸۸۴۸۹	۰/۰۹۷۸۸۸	۰/۱۱۶۱۴۶	۰/۰۸۹۱۲۷	۰/۰۷	۱۱
۰/۰۰۶۲	۰/۱۵۸۹۵۲	۰/۱۴۲۱۷	۰/۱۵۲۱۲	۰/۰۰۳۶۹۴	۰/۰۱۵۹۱۹	۰/۰۱۲۹۷۸	۰/۱۶۹۱۰۷	۰/۱۰۳۷۸۲	۰/۰۹۶۶۲۹	۰/۱۴۴۶۴۹	۰/۰۸	
۰/۰۱۱۲	۰/۰۷۱۴۶۲	۰/۰۸۹۹۳۵	۰/۱۶۲۸۰۳	۰/۰۲۴۷۰۵	۰/۱۱۰۲۸۳	۰/۰۲۰۳۸۳	۰/۱۳۴۵۱۶	۰/۰۷۹۵۳۱	۰/۱۳۷۷۲۶	۰/۱۶۸۶۵۴	۰/۱۲۱	
۰/۰۱۲۱	۰/۱۲۲۷۵۳	۰/۱۶۹۹۱	۰/۱۱۱۰۷۱	۰/۱۱۰۲	۰/۱۱۱۱۹۸	۰/۰۰۳۳۸۳	۰/۱۰۲۳۳۹	۰/۰۸۲۱۲۴	۰/۱۳۹۳۹۱	۰/۰۴۷۶۳	۰/۱۵۱	
۰/۰۲۲۵	۰/۰۹۳۰۱۵	۰/۰۸۰۶۶۷	۰/۰۳۲۹۷۱	۰/۰۵۳۸۰۳	۰/۱۷۱۵۰۸	۰/۱۷۰۵۱۸	۰/۰۱۵۴۰۲	۰/۱۷۸۴۱۱	۰/۱۱۱۷۶۶	۰/۰۹۱۹۴	۰/۱۷۴	
۰/۰۳۵۴	۰/۰۵۹۸۱۲	۰/۱۱۴۱۰۹	۰/۰۶۱۹۸۲	۰/۱۵۹۸۱۹	۰/۰۳۹۴۷۳	۰/۰۵۱۱۱۳	۰/۰۲۴۹۷۱	۰/۲۴۱۸۶۱	۰/۱۰۷۳۲۸	۰/۱۳۹۵۳	۰/۲۰۲	
۰/۰۴۵۲	۰/۰۲۷۶۰۴	۰/۲۴۰۶۹۹	۰/۰۲۷۸۹۲	۰/۲۳۵۸۲۹	۰/۱۰۵۹۱۶	۰/۰۵۶۴۶۸	۰/۰۳۹۶۹۳	۰/۱۸۸۵۳	۰/۰۳۱۷۰۵	۰/۰۴۵۶۶۴	۰/۲۳۴	

جدول ۶: نتایج مدل میانگین نیم واریانس بازده (RMADG).

ریسک (AD) پرتفو	وزن سهام‌های منتخب از فاز اول										بازده مورد انتظار	نرخ رشد سود مورد انتظار
	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱		
۰/۰۰۳۱	۰/۱۷۱۲۵۴۶۴	۰/۱۲۶۱۰۶۳۳	۰/۱۰۹۸۳۱۰۶۷	۰/۰۵۹۱۹۹۸۹۲	۰/۰۲۹۳۴۸۳۷۷	۰/۰۴۶۶۴۴۰۶۲	۰/۰۹۶۰۹۱۶۷۵	۰E-۳/۶۴	۰/۲۲۸۹۴۳۸۶۴	۰/۱۳۲۵۴۳۹۱۶	۰/۰۸	
۰/۰۰۵۴	۰/۰۴۷۱۷۴۶۳۸	۰/۰۳۳۴۳۰۸۵۹	۰/۱۳۳۰۴۲۸۶۹	۰/۰۹۹۳۷۴۳۱	۰/۱۵۹۶۶۰۹۰۱	۰/۰۶۵۲۱۹۰۹	۰/۲۰۹۱۰۹۳۴۳	۰/۰۴۸۶۸۶۹۶۸	۰/۱۶۳۱۷۳۸۴۶	۰/۰۹۹۸۲۴۳۳۵	۰/۰۹۶	
۰/۰۱۱۱	۰/۱۵۳۵۷۹۹۳۱	۰/۰۲۹۷۰۱۹۴۹	۰/۰۰۶۸۳۰۳۶۲	۰/۰۱۴۸۷۳۵۳۶	۰/۱۵۶۴۵۹۳۷۸	۰/۱۵۳۲۷۳۲۸۴	۰/۱۲۱۰۸۱۵۵۵	۰/۰۵۴۸۱۵۳۲۱	۰/۱۶۹۳۴۱۰۱۸	۰/۱۴۰۰۴۳۶۶۶	۰/۱۳۲	
۰/۰۱۲۰	۰/۱۴۱۳۳۷۶۹۱	۰/۰۰۳۴۴۵۷۶۷	۰/۱۵۷۲۵۵۱۶۲	۰/۱۲۹۳۴۶۳۸۶	۰/۰۵۹۴۴۷۵۶۲	۰/۱۳۰۳۵۹۳۳۵	۰/۱۰۰۴۵۵۸۰۴	۰/۱۸۰۴۷۹۷۹۹	۰/۰۷۹۳۴۲۵۷۲	۰/۰۱۸۵۲۹۹۲	۰/۱۶۲	۱۱
۰/۰۲۰۰	۰/۰۲۶۱۲۱۲۵۸	۰/۰۵۷۸۱۰۷۸۶	۰/۰۵۸۹۸۳۷۳۶	۰/۱۸۲۵۲۶۴۸۲	۰/۰۸۹۹۷۶۷۰۵	۰/۰۲۰۷۳۶۹۲۸	۰/۱۵۸۵۵۷۲۲۳	۰/۰۵۶۳۳۸۰۰۲	۰/۱۵۰۲۹۷۹۵۴	۰/۱۹۸۶۵۰۹۲۴	۰/۱۸۱	
۰/۰۳۴۲	۰/۱۸۷۵۹۱۵۶	۰/۱۵۷۹۸۱۳۱۴	۰/۰۳۹۳۵۰۶۷	۰/۱۵۳۹۰۹۷۲۶	۰/۰۱۴۳۰۵۴۵۷	۰/۱۳۱۷۸۱۱۷	۰/۰۷۱۱۸۷۸۷۷	۰/۰۵۶۷۳۳۳۶۸	۰/۱۸۱۹۸۲۵۵۸	۰/۰۰۵۱۹۱۹۰۳	۰/۲۱۲	
۰/۰۴۲۱	۰/۱۱۹۲۰۲۶۷۷	۰/۱۹۱۹۶۵۳۱۵	۰/۰۴۶۳۸۳۶۵	۰/۱۳۴۸۹۹۶۹۹	۰/۰۸۹۰۷۵۷۳	۰/۰۱۰۱۵۱۷۹۴	۰/۰۸۴۱۷۱۶۰۲	۰/۱۴۱۱۱۹۵۰۶	۰/۰۸۴۱۴۶۵۴۸	۰/۰۲۰۷۹۶۹۱۹	۰/۲۴۵	

در پایان این بخش، عملکرد پورتفولیو بر اساس مدل‌های RMADG و RMSVG مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. بر این اساس، پنج معیار رایج شامل بازده میانگین اضافی (EMR)، انحراف نزولی (DD)، نسبت شارپ (SHR)، نسبت اطلاعات (IR)، و نسبت Sortino (SOR) اعمال می‌شوند. شرح مختصری از این معیارها به شرح زیر است: EMR: پاداش پرتفوی نسبت به شاخص بازار یا تفاوت بین بازده پرتفوی و بازده شاخص بازار را توضیح دهید. EMR با معادله (۳۳) محاسبه می‌شود، که در آن RP و RI به ترتیب بر بازده پرتفوی و بازده شاخص بازار نشان می‌دهند. قابل ذکر است که مقادیر بالاتر EMR مطلوب است.

$$EMR = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_p(t) - R_f(t)) \quad (33)$$

توسط معادله (۳۴) توجه داریم که مقادیر کمتر DD مطلوب است.

$$DD = \frac{1}{T} \sqrt{\sum_{t=1}^T (\text{Min}\{R_p(t) - R_f(t), 0\})^2} \quad (34)$$

SHR: میانگین بازده کسب شده نسبت به نرخ بازده بدون ریسک را به ازای هر واحد انحراف استاندارد توصیف می‌کند.

SHR با معادله (۳۵) محاسبه می‌شود، که در آن R_f ، $E(R_p)$ و $\sigma(R_p)$ نشان دهنده میانگین بازده پورتفولیو، نرخ بازده بدون ریسک و انحراف استاندارد بازده پرتفوی است.

توجه داریم که مقادیر بالاتر SHR مطلوب است

$$SHR = \begin{cases} \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma(R_p)} & \text{if } E(R_p) > R_f \\ 0 & \text{if } E(R_p) \leq R_f \end{cases} \quad (35)$$

IR: بازده تعدیل شده با ریسک یک دارایی مالی یا پرتفوی را نسبت به یک دارایی مشخص توصیف می‌کند.

معیار IR با معادله (۳۶) محاسبه می‌شود. توجه داریم که مقادیر بالاتر IR مطلوب است.

$$IR = \begin{cases} \frac{EMR}{\sigma(R_p - R_f)} & \text{if } EMR > 0 \\ 0 & \text{if } EMR \leq 0 \end{cases} \quad (36)$$

SOR: بازده هر واحد ریسک است و با معادله (۳۷) محاسبه می‌شود. توجه داریم که مقادیر بالاتر SOR مطلوب است.

$$SOR = \begin{cases} \frac{EMR}{DD} & \text{if } EMR > 0 \\ 0 & \text{if } EMR \leq 0 \end{cases} \quad (37)$$

اکنون با اعمال معادلات (۳۳) تا (۳۷)، تمامی معیارهای عملکرد برای مدل‌های RMSVG و RMADG محاسبه می‌شوند. نتایج حاصل از EMR، DD، SHR، IR و SOR در جدول نتایج ارائه شده است:

جدول ۷: نتایج معیارهای عملکرد RMSVG و RMADG

مدل	EMR	DD	SHR	IR	SOR
RMSVG	۰/۰۶۲۵۴	۰/۰۷۴۵۱	۰/۰۶۱۲۵۴	۰/۰۵۰۱۲۵	۰/۰۹۰۱۲۴۵
RMADG	۰/۰۶۱۷۵	۰/۰۷۳۲۵	۰/۰۶۰۱۲۵	۰/۰۴۹۵۶۲	۰/۰۸۹۶۵۲۱

تحلیل نتایج نشان می‌دهد که هر دو مدل پیشنهادی (RMSVG و RMADG) در ساخت سبد سرمایه‌گذاری بهینه عملکرد قابل قبولی دارند و توانسته‌اند بازدهی بالاتر از نرخ بدون ریسک بازار را کسب کنند. با این حال، مدل RMSVG در تمامی شاخص‌های عملکرد، برتری جزئی نسبت به مدل RMADG داشته است.

نتیجه‌گیری

تحقیق حاضر با هدف توسعه یک رویکرد جامع برای بهینه‌سازی پرتفوی در شرایط عدم قطعیت، به بررسی ترکیبی از برنامه‌ریزی محدودیت اعتبار-استوار، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و روش‌های بهینه‌سازی پرتفوی پرداخت. نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل‌های پیشنهادی بر روی داده‌های بورس اوراق بهادار تهران نشان داد که مدل RMSVG نسبت به مدل RMADG عملکرد بهتری در دستیابی به تعادل بین بازده و ریسک دارد. همچنین، این رویکرد می‌تواند در مقایسه با روش‌های سنتی، پایداری بیشتری در برابر تغییرات بازار از خود نشان دهد. با این حال، تحقیق حاضر دارای محدودیت‌هایی از جمله دوره زمانی محدود داده‌ها و فرض استقلال متغیرهای تصادفی است. برای تحقیقات آینده، می‌توان به توسعه مدل‌هایی با در نظر گرفتن وابستگی بین متغیرها، استفاده از داده‌های با فرکانس بالاتر و بررسی تأثیر هزینه‌های معاملاتی پرداخت. در کل، این تحقیق نشان داد که رویکرد ترکیبی پیشنهادی می‌تواند به عنوان یک ابزار مفید برای سرمایه‌گذاران در تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری استفاده شود.

منابع

- Abdel-aziem, A. H., Mohamed, H. K., & Abdelhafeez, A. (2023). Neutrosophic decision making model for investment portfolios selection and optimizing based on wide variety of investment opportunities and many criteria in market. *Neutrosophic systems with applications*, 6, 32-38 .
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078-1092 .
- Belabbes, K., & El Abidine, G. Z. (2023). Mean-TVaR Models for Diversified Multi-period Portfolio Optimization with Realistic Factors based on Uncertainty Theory. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 11(4), 963-977 .
- Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical programming*, 88(3), 411-424 .
- Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations research*, 52(1), 35-53 .
- Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L., & Stutz, J. (۱۹۸۵). Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. *Journal of econometrics*, 30(1-2), 91-107 .
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429-444 .
- Dal Molim, T. F., & Souza, F. C. M. (2023). Multistage, Multiswarm Particle Swarm Optimization for Investment Portfolio Selection. *Anais do II Brazilian Workshop on Artificial Intelligence in Finance* ,
- Das ,A., Chaudhuri, T., Roy, S. S., Biswas, S., & Guha, B. (2023). Selection of appropriate portfolio optimization strategy. *Theoretical and Applied Computational Intelligence*, 1(1), 58-81 .
- Edirisinghe , N., & Zhang, X. (2007). Generalized DEA Model of Fundamental Analysis and its Application to Portfolio Optimization. *Journal of Banking & Finance*, vol. 31: 3311-3335
- Esmaili, F. S. S., Peykani, P., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Lotfi ,F. (2018). Measuring productivity changes of hospitals in Tehran: the fuzzy Malmquist productivity index. *International Journal of Hospital Research* .
- Farrel, J. (1957). The measurement of Productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A, General* 125. *Part*(2), 252 .
- Feng, Q.-Y., Wu, X., Zhang, L.-L., & Li, J. (2023). Research on portfolio optimization under asymmetric power-law distribution of return tail. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 33 .(۱)
- Fernandes ,L., Kulkarni, M., & Pande, M. B. (2023). A Systematic Literature Review of Classical and Quantum Machine Learning Approaches for Mutual Fund Portfolio Optimization. 2023 IEEE Pune Section International Conference (PuneCon) ,

- Gentile, C., Pinto, D. M & ,Stecca, G. (2021). Price of Robustness Optimization through Demand Forecasting and Robust Planning Models Integration in Waste Management .
- Ghassemi, A. (2019). System of systems approach to develop an energy-water nexus model under uncertainty University of Illinois at Chicago.
- Ghassemi, A., Hu, M., & Zhou, Z. (2017). Robust planning decision model for an integrated water system. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 143(5), 05017002 .
- Jabbarzadeh, A., Fahimnia, B., & Seuring, S .(۲۰۱۴) .Dynamic supply chain network design for the supply of blood in disasters: A robust model with real world application. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 70, 225-244 .
- Jaberi, M., Mohammadi, E., & Azizi, A. (2022). Multi- Objective Portfolio Optimization Model With Fuzzy – Robust Hybrid Approach. *Journal of Securities Exchange*, 15(59), 441-470.
- Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management science*, 37(5), 519-531 .
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection in The Journal of Finance Vol. 7 .
- Mohammadi, S., Mohammadi, O., & Barzin pour, F. (1997). Stock portfolio optimization in Tehran Stock Exchange using data envelopment analysis and symbiotic organism search algorithm. *New research in decision making*, 3(2), 223-248.
- Namakshenas, M., & Mahdavi Mazdeh, M. (2017). Event-driven and Attribute-driven Robustness. *Iranian Journal of Operations Research*, 8(1), 78-90 .
- Nascimento, W. C., & Pacheco, M. A. C. (2023). Pareto optimization via genetic algorithm for selecting a portfolio of oil and gas exploration projects. 2023 International Conference on Algorithms, Computing and Data Processing (ACDP) ,
- Peykani, P., Esmacili, F. S. S., Lotfi, F. H., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2019). Estimating most productive scale size in DEA under uncertainty. Conference on Data Envelopment Analysis th ,
- Peykani, P., & Mohammadi, E. (2018). Robust data envelopment analysis with hybrid uncertainty approaches and its applications in stock performance measurement. The 14th International Conference on Industrial Engineering, Tehran, Iran ,
- Peykani, P., Mohammadi, E., Emrouznejad, A., Pishvae, M. S., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2019). Fuzzy data envelopment analysis: an adjustable approach. *Expert Systems with Applications*, 136, 439-452 .
- Peykani, P., Mohammadi, E., Jabbarzadeh, A., & Jandaghian, A. (2016). Utilizing robust data envelopment analysis model for measuring efficiency of stock, a case study: Tehran stock exchange. *Journal of New Researches in Mathematics*, 1(4), 15-24 .
- Peykani, P., Mohammadi, E., Jabbarzadeh, A., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Pishvae, M. S. (2020). A novel two-phase robust portfolio selection and optimization approach under uncertainty: A case study of Tehran stock exchange. *Plos one*, 15(10), e0239810 .

- Peykani, P., Mohammadi, E., Pishvae, M. S., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Jabbarzadeh, A. (2018). A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: possibility, necessity and credibility-based approaches. *RAIRO-Operations Research*, 52(4-5), 1445-1463 .
- Peykani, P., Mohammadi, E., Rostamy-Malkhalifeh, M & ,Hosseinzadeh Lotfi, F. (2019). Fuzzy data envelopment analysis approach for ranking of stocks with an application to Tehran stock exchange. *Advances in Mathematical Finance and Applications*, 4(1), 31-43 .
- Peykani, P., Mohammadi, E., Sadjadi, S. J., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2018). A robust variant of radial measure for performance assessment of stock. 3th International Conference on Intelligent Decision Science, Iran ,
- Peykani, P., Mohammadi, E., & Seyed Esmacili, F. S. (2019). Stock evaluation under mixed uncertainties using robust DEA model. *Journal of Quality Engineering and Production Optimization*, 4(1), 73-84 .
- Pishvae, M. S., Rabbani, M., & Torabi, S. A. (2011). A robust optimization approach to closed-loop supply chain network design under uncertainty. *Applied mathematical modelling*, 35(2), 637-649 .
- Pishvae, M. S., Razmi, J., & Torabi, S. A. (2012). Robust possibilistic programming for socially responsible supply chain network design: A new approach. *Fuzzy sets and systems*, 206, 1-20 .
- Soyster, A. L. (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations research*, 21(5), 1154-1157 .
- Tao, Y., Luo, X., Wu, Y., Zhang, L., Liu, Y., & Xu, C. (2023). Portfolio selection of power generation projects considering the synergy of project and uncertainty of decision information. *Computers & Industrial Engineering*, 175, 108896 .
- Tsai, C.-E., Lin, Y.-T., & Li, Y.-H. (2024). Data-dependent bounds for online portfolio selection without Lipschitzness and smoothness. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 36 .
- Xidonas, P., Mavrotas, G., Hassapis, Ch., & Zopounidis. C. (2017). Robust multiobjective portfolio optimization: A minimax regret approach. *European Journal of Operational Research*, 262: 299–305.
- Yadav, S., Gupta, P., Mehlaawat, M. K., & Kumar, A. (2024). A multiobjective multiperiod portfolio selection approach with different investor attitudes under an uncertain environment. *Soft Computing*, 28(13), 8013-8050 .
- Zahmati Iraj, M., & Doaei, M. (2024). A Hybrid Decision-Making Model for Optimal Portfolio Selection under Interval Uncertainty. *Iranian Journal of Accounting, Auditing and Finance*, 8(4), 1-24 .
- Zhou, Z., Song, Z., Ren, T., & Yu, L. (2022). Two-stage portfolio optimization integrating optimal sharp ratio measure and ensemble learning. *IEEE access*, 11, 1654-1670 .